

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ COMPUTER SIMULATION

УДК 004.942

DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-3-623-641

EDN NCHMIO

Системное моделирование отталкивания с радиационным трением точечных зарядов на основе классического гармонического анализа

Дубровин А.С., Сумин В.И., Кравченко А.С.

Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова,
Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Тимирязева, д. 8
asd_kiziltash@mail.ru

Аннотация. Предложен методологический подход к комплексному применению методов системного анализа и методов классического гармонического анализа к задачам классической математической физики при математическом моделировании дальнего действия сложных нелинейных систем заряженных материальных точек (ЗМТ), что лежит в русле появления и развития классического гармонического системного анализа как одного из перспективных направлений системного анализа. Его методы естественно применять для анализа, синтеза и управления техническими устройствами, подчиняющимися законам классической физики, путем надлежащей обработки информации в процессе их моделирования, как моделей динамики сложных систем, дающего возможность оценивать достижимость цели системой и другие родственные характеристики (например, своевременность достижения цели). Разработан применимый к дальнему действию сложных нелинейных систем ЗМТ способ проведения с использованием метода быстрых разложений классического гармонического системного анализа на основе комплекса аксиологического и каузального представлений моделей при обработке информации в процессе моделирования. Для этого метод быстрых разложений, известный своей эффективностью при моделировании близкого действия физических полей и сплошных материальных сред, адаптирован в рамках классического гармонического системного анализа к моделированию дальнего действия сложных нелинейных систем ЗМТ. Использование этого метода приводит к формированию каузального представления, основанного на аппроксимации траекторий ЗМТ быстрыми разложениями, параметры которых находятся решением системы нелинейных алгебраических уравнений, соответствующей системе нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующей дальнее действие. Работоспособность предложенного способа проверена на примере сложной системы взаимно отталкивающихся в вакууме с радиационным трением двух ЗМТ, описываемой нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка.

Ключевые слова: системный анализ, обработка информации, сложная система, гармонический анализ, ряды Фурье, дальнее действие, радиационное трение, заряженная материальная точка

Для цитирования: Дубровин А.С., Сумин В.И., Кравченко А.С. 2025. Системное моделирование отталкивания с радиационным трением точечных зарядов на основе классического гармонического анализа. *Экономика. Информатика*, 52(3): 623–641. DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-3-623-641. EDN NCHMIO

Systemic Modeling of Repulsion with Radiative Friction of Point Charges Based on Classical Harmonic Analysis

Anatoly S. Dubrovin, Viktor I. Sumin, Andrey S. Kravchenko
Voronezh State Forest Engineering University named after G.F. Morozov,
8 Timiryazev St., Voronezh 394087, Russia
asd_kiziltash@mail.ru

Abstract. The article proposes a methodological approach to the integrated application of system analysis methods and classical harmonic analysis methods to problems of classical mathematical physics in mathematical modeling of action at a distance of complex nonlinear systems of charged material points (CMP). This is in line with the emergence and development of classical harmonic system analysis as a promising area of system analysis. Its methods are naturally applied to the analysis, synthesis and control of technical devices that obey the laws of classical physics. This application occurs through proper processing of information in the process of their modeling as models of the dynamics of complex systems. The modeling makes it possible to estimate the system's ability to attain the goal and other related characteristics (for example, the timeliness of achieving the goal). A method has been developed for conducting classical harmonic system analysis based on a set of axiological and causal representations of models during information processing in the process of modeling. This method can be applied to action at a distance of complex nonlinear systems of CMP. For this purpose, the fast expansion method, known for its efficiency in modeling short-distance action of physical fields and continuous material media, is adapted within the framework of classical harmonic system analysis to modeling action at a distance of complex nonlinear CMP systems. The use of this method leads to the formation of a causal representation based on the approximation of CMP trajectories by fast expansions, the parameters of which are found by solving a system of nonlinear algebraic equations corresponding to a system of nonlinear differential equations modeling action at a distance. The proposed method efficiency has been verified using the example of a complex system of two CMPs mutually repelling in a vacuum with radiative friction, described by a nonlinear system of differential equations of the third order.

Keywords: systems analysis, information processing, complex system, harmonic analysis, Fourier series, action at a distance, radiative friction, charged material point

For citation: Dubrovin A.S., Sumin V.I., Kravchenko A.S. 2025. Systemic Modeling of Repulsion with Radiative Friction of Point Charges Based on Classical Harmonic Analysis. *Economics. Information technologies*, 52(3): 623–641. DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-3-623-641. EDN NCHMIO

I. Введение

В связи с тем, что, согласно «узкому определению системного анализа», данному академиком Моисеевым Н.Н., методы системного анализа ориентированы на исследование с использованием ЭВМ сложных систем [Моисеев, 2013], среди которых можно выделить сложные технические системы, процессы функционирования которых подчиняются физическим законам, при исследовании упомянутых сложных технических систем важную роль играет совместное, причем взаимосвязанное, применение методов системного анализа и математической физики. Если процессы функционирования этих сложных технических систем подчиняются законам не квантовой, а классической физики, то и речь в данном случае идет о комплексном применении методов системного анализа и классической математической физики.

Вслед за тем, что классический математический анализ имеет свои естественные приложения в области классической математической физики, математической основой которой являются краевые задачи для дифференциальных уравнений в евклидовом пространстве с возможным наличием независимого времени, классический гармонический анализ (в общем случае многомерный гармонический анализ в евклидовых пространствах, одно из удачных введений к которому дано в [Стейн, Вейс, 1974]), как одно из неклассических направлений современного анализа, выросших из классического математического анализа совместно с

вещественным анализом (теория функций одной и нескольких вещественных переменных) и комплексным анализом (теория функций одной и нескольких комплексных переменных), имеет дальнейшие естественные приложения в данной области. Задачи классической математической физики решаются при этом с использованием представлений функций (в общем случае нескольких переменных), фигурирующих в соответствующих дифференциальных уравнениях, в виде рядов Фурье и интегралов Фурье, опять-таки в общем случае многомерных. В отличие от классического, абстрактный гармонический анализ (гармонический анализ на абстрактных структурах с применением представлений групп и меры Хаара) имеет наиболее естественные приложения за пределами классической математической физики.

Так как в современной физике господствует теоретико-полевая парадигма, то и среди задач математической физики, включая классическую, преобладают задачи исследования физических полей и сплошных материальных сред. Применение классического гармонического анализа в таких задачах хорошо известно и продуктивно, как, например, в [Лыков, 1967; Тимошенко, Гудьер, 1979; Тихонов, Самарский, 1999; Лешонков, 2018]. Однако естественно присущие теоретико-полевой парадигме недостатки и ограничения стимулируют исследователей обращаться к идеям дальнего действия [Владимиров, 2012]. Показательны слова Фейнмана Р: «Понятия простых заряженных частиц и электромагнитного поля как-то не согласуются друг с другом» [Фейнман, Лейтон, Сэндс, 1977]. Классическая модель такой «простой заряженной частицы» – заряженная материальная точка (ЗМТ). А характерное отличие такого рода моделей дальнего действия пространственно-удаленных ЗМТ – их непосредственное (без физических полей, эмиссий и т. д. в роли посредников) физическое взаимодействие.

Одна из самых известных классических моделей дальнего действия ЗМТ относится к теории прямого межчастичного взаимодействия Фоккера – Фейнмана [Wheeler, Feynman, 1945]. К альтернативным этой теории классическим моделям дальнего действия ЗМТ относятся гиперконтинуальные модели (в частности, представленные в [Дубровин, 2018; Дубровин, 2019]), идейная основа которых претерпела эволюцию от фундаментальной роли идей классического гармонического анализа в [Дубровин, 2013а; Дубровин, 2013б] к фундаментальной роли идей дальнего действия в [Дубровин, 2018; Дубровин, 2019].

В классических моделях дальнего действия систем ЗМТ эти системы можно рассматривать как сложные системы, декомпозируемые на подсистемы, причем в простейшем случае роль подсистемы играет отдельная ЗМТ (тривиальная подсистема). При отсутствии взаимодействия данной ЗМТ с другими и внешней средой она движется равномерно прямолинейно, и соответствующим вектором скорости можно идентифицировать состояние тривиальной подсистемы, которое оказывается постоянным во времени, что означает статичность подсистемы. Совокупность таких подсистем не образует сложную систему. Наличие взаимодействия данной ЗМТ с другими или внешней средой означает динамичность соответствующей подсистемы, но в случае линейности взаимодействий вряд ли уместно говорить о сложности системы. Однако нелинейность системы наряду с разделением взаимодействия на внутреннее (между тривиальными подсистемами) и внешнее (тривиальных подсистем с внешней средой) является весомым фактором отнесения данной системы к сложным системам, причем именно к внутренне сложным системам, характеризующимся сложностью пространства их внутренних состояний.

Комплексное применение методов системного анализа и методов классического гармонического анализа к задачам классической математической физики при математическом моделировании дальнего действия сложных нелинейных систем ЗМТ лежит в русле появления и развития классического гармонического системного анализа как одного из перспективных направлений системного анализа, что было рассмотрено в [Дубровин, 2023а]. Предполагается, что естественная область практического использования данного перспективного направления системного анализа относится к моделированию технических устройств, процессы функционирования которых подчиняются законам классической физики. При этом, согласно [Перегудов, Тарасенко, 1989], применение методов системного анализа проводится при

обработке информации в процессе моделирования динамики сложной технической системы и, тем самым, относится, прежде всего, к информационным аспектам сложной системы: к информации о состоянии подсистем, к целям системы, к информационным потокам при обработке информации. Информационный поток при обработке информации формируется из информации о переходах подсистем из одних состояний в другие в конкретные моменты или промежутки времени. А цель сложной системы, понимаемая в универсальном (без различения искусственного или естественного характера системы) смысле, раскрытом в [Тарасенко, 2004], означает в данном случае достижение системой любого состояния, подходящим образом определенного через состояния всех подсистем, которое принадлежит целевому подпространству пространства состояний системы и потому обретает статус целевого состояния. Применение методов классического гармонического системного анализа призвано позволять анализировать, синтезировать технические устройства и управлять ими путем надлежащей обработки информации в процессе их моделирования, как моделей динамики сложных систем, дающего возможность оценивать достижимость цели системой и другие родственные характеристики (например, своевременность достижения цели).

Для обеспечения такой применимости методов классического гармонического системного анализа при обработке информации в процессе моделирования динамики сложных систем соответствующие математические модели должны иметь подходящие представления. Аналогичная проблема поиска подходящих представлений возникала и при построении квантового полумарковского системного анализа (комплексное применение методов системного анализа и методов теории конечных полумарковских процессов к задачам квантовой механики и квантовой теории поля в рамках квантовой математической физики при математическом моделировании сложных квантовых систем), как другого перспективного направления системного анализа наряду с рассматриваемым в настоящей статье классическим гармоническим системным анализом, что было рассмотрено в [Дубровин, 2023б] применительно к сложным квантовым системам с взаимно несовместимыми состояниями и в [Дубровин, 2024] применительно к сложным квантовым системам с интерферирующими нецелевыми и взаимно несовместимыми целевыми состояниями. Очевидно, что использованный в работах [Дубровин, 2023б; Дубровин, 2024] и заимствованный из [Волкова, Денисов, 2021] способ проведения подходящего представления моделей в целом подходит и для классического гармонического системного анализа и представляет собой комплексирование аксиологического и каузального представлений математической модели динамики сложной квантовой системы. При комплексном применении методов системного анализа и методов классического гармонического анализа в рамках использования классического гармонического системного анализа аксиологическое представление в некотором смысле отвечает за применение первых, а каузальное – вторых.

Применение методов классического гармонического анализа к задачам классической математической физики при математическом моделировании дальнодействия сложных нелинейных систем ЗМТ наталкивается на те же самые трудности, что и при математическом моделировании физических полей и сплошных материальных сред, – низкая скорость сходимости рядов Фурье и то, что они не обязательно почленно дифференцируемы с нужной кратностью [Дубровин, 2023а]. Согласно [Толстов, 1980], преодолеваются эти трудности использованием таких рядов Фурье, у которых скорость сходимости повышена в надлежащей мере.

Метод [Чернышов и др., 2014] получения рядов Фурье с надлежащей скоростью сходимости для эффективного решения не только линейных, но и нелинейных задач классической математической физики, получил название метода быстрых разложений и успешно применялся при математическом моделировании (например, в [Лешонков, 2018]). В частности, как показано в [Чернышов и др., 2019], при решении задач с дифференциальными уравнениями не выше третьего порядка применение данного метода с граничной функцией не ниже второго порядка позволяет для достижения той же точности ограничиться одним только первым членом ряда вместо сотен или даже тысяч членов классических рядов Фурье.

Представляется актуальной тематика распространения метода быстрых разложений в рамках классического гармонического системного анализа на основе комплекса аксиологического и каузального представлений моделей с математического моделирования близкодействия физических полей и сплошных материальных сред на математическое моделирование дальнодействия сложных нелинейных систем ЗМТ. Использование метода быстрых разложений при этом приводит к формированию каузального представления, основанного на аппроксимации траекторий ЗМТ быстрыми разложениями, параметры которых находятся решением системы нелинейных алгебраических уравнений, соответствующей системе нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующей дальнодействие. Для удобства проработки данной тематики важно выбрать подходящий как можно более простой, но притом показательный пример сложной системы ЗМТ. Согласно [Дубровин, 2023а], на эту роль вполне подходит система взаимно отталкивающихся в вакууме с радиационным трением двух ЗМТ.

Цель работы – разработка способа проведения с использованием метода быстрых разложений классического гармонического системного анализа на основе комплекса аксиологического и каузального представлений моделей при обработке информации в процессе математического моделирования дальнодействия сложных нелинейных систем ЗМТ на примере системы взаимно отталкивающихся в вакууме с радиационным трением двух ЗМТ.

II. Постановка задачи

Условимся о варьировании индексов α , $\bar{\alpha}$ только в следующих пределах: $\alpha = \overline{1, 2}$, $\bar{\alpha} = \overline{0, 2}$. Пусть сложная система декомпозируется на две тривиальные подсистемы, нумеруемые вместе с соответствующими пространственно-разделенными в вакууме ЗМТ индексом α , и функционирует на отрезке времени $t \in [-a, a]$, $a > 0$ длительности $T = 2a > 0$. Время отсчитывается от начального момента $(-a)$ и вообще изменяется в таких пределах для удобства использования универсального быстрого разложения. При математическом моделировании этой сложной системы из числа физических постоянных используются электрическая постоянная ε_0 и постоянная скорости света C , а каждая подсистема α параметризуется инертной массой $m_\alpha > 0$ и электрическим зарядом $Q_\alpha \in \mathbb{R}$, причем $Q_1 Q_2 > 0$. Дополнительно введем неотрицательные величины

$$m_{F\alpha} = \frac{Q_\alpha^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}, \quad C = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Вращение в системе отсутствует, так что прямая, проходящая через обе ЗМТ, инерциальная. ЗМТ под действием Кулоновской силы взаимно удаляются по причине одноименности зарядов. Динамику системы удобно рассматривать в инерциальных системах отсчета (ИСО), в которых угол между радиус-векторами ее ЗМТ составляет $\pi/2$, так что движение ЗМТ в них прямолинейно по общей прямой, и в которых это движение притом разнонаправлено. В данной задаче рассматриваются только нерелятивистские ИСО. В роли динамической переменной подсистемы выступает зависимость модуля радиус-вектора ЗМТ от времени. Она различается в зависимости от выбора математической модели, в частности от того, какие силы учитываются в модели.

А именно, учет излучения ЗМТ требует учета силы радиационного трения. Авторитетный базовый анализ этого вопроса дан в [Ландау, Лифшиц, 2020], а важные дополнительные сведения, раскрывающие его проблемный характер, – в [Гинзбург, 1969; Фейнман, Лейтон, Сэндс, 1977; Poisson, 1999; Соколов, 2009]. Так, в [Гинзбург, 1969] академик Гинзбург В.Л. причислил вопрос об уравнениях движения с учетом силы радиационного трения и вопрос об излучении и реакции излучения при равномерно ускоренном движении

заряда к «вечным вопросам» в физике. Вслед за знаменитым выявлением в [Фейнман, Лейтон, Сэндс, 1977] трудностей такого рода, в [Poisson, 1999] обсуждаются трудности теоретико-полевой интерпретации формул реакции излучения, как уравнений движения точечного заряда. В классическом релятивистском теоретико-полевом контексте учет силы радиационного трения осуществляется посредством использования формулы Лоренца – Абрагама – Дирака или родственных ей формул вроде формулы Соколова [Соколов, 2009], но в классическом дальнедействующем контексте, как и в классическом нерелятивистском теоретико-полевом, предпочтительнее представляется формула Лоренца.

Если в качестве противодействующих Кулоновской сил рассматривать только Даламберову силу инерции, то динамические переменные $\bar{r}_\alpha = \bar{r}_\alpha(t) > 0$ определяются системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$m_\alpha \ddot{\bar{r}}_\alpha (\bar{r}_1 + \bar{r}_2)^2 = C. \quad (1)$$

Если же дополнительно учитывать по формуле Лоренца силу радиационного трения, много меньшую указанных двух сил, то динамические переменные $r_\alpha = \bar{r}_\alpha - \tilde{r}_\alpha = r_\alpha(t) = \bar{r}_\alpha(t) - \tilde{r}_\alpha(t)$, для которых $0 < \tilde{r}_\alpha \ll \bar{r}_\alpha$, $0 < r_\alpha \leq \bar{r}_\alpha$, определяются более сложной системой, содержащей рывок $\ddot{r}_\alpha$:

$$(m_\alpha \ddot{r}_\alpha - m_{F\alpha} \ddot{r}_\alpha)(r_1 + r_2)^2 = C. \quad (2)$$

Одним из возможных примеров формализации своевременности (за промежуток времени T) достижения цели системы отметим характеристики

$$\Psi = \bigwedge_{\alpha=1}^2 \Psi_\alpha, \quad (3)$$

$$\bar{\Psi} = \bigwedge_{\alpha=1}^2 \bar{\Psi}_\alpha \quad (4)$$

для моделей (1) и (2) соответственно, естественно декомпозируемые по соответствующим целям обеих подсистем α :

$$\Psi_\alpha = \Psi_\alpha(r_{\alpha \min}, r_{\alpha \max}, v_{\alpha \min}, v_{\alpha \max}) = (r_\alpha(a) \in (r_{\alpha \min}, r_{\alpha \max})) \wedge (\dot{r}_\alpha(a) \in (v_{\alpha \min}, v_{\alpha \max})),$$

$$\bar{\Psi}_\alpha = \bar{\Psi}_\alpha(r_{\alpha \min}, r_{\alpha \max}, v_{\alpha \min}, v_{\alpha \max}) = (\bar{r}_\alpha(a) \in (r_{\alpha \min}, r_{\alpha \max})) \wedge (\dot{\bar{r}}_\alpha(a) \in (v_{\alpha \min}, v_{\alpha \max})),$$

где заданные среди исходных данных системного анализа общие для обеих моделей величины $r_{\alpha \min} \in [0, +\infty]$, $r_{\alpha \max} \in [0, +\infty]$, $v_{\alpha \min} \in [0, +\infty]$, $v_{\alpha \max} \in [0, +\infty]$ определяют целевые диапазоны для координат и скоростей ЗМТ. Оценка величин $r_\alpha(a)$, $\dot{r}_\alpha(a)$ или им подобных, требуемых для определения событий (3), (4) или им подобных, наиболее естественно через приближенное аналитическое решение уравнений (1), (2), осуществить которое позволяет использование метода быстрых разложений.

Уравнения (1) и (2) будем рассматривать в одной и той же ИСО. Тогда величины $\tilde{r}_\alpha$ представляют собой малые поправки к приближенным значениям $\bar{r}_\alpha$ величин r_α , обусловленные учетом силы радиационного трения. Начальное расстояние между ЗМТ

$$R_0 = (r_1(-a) + r_2(-a)) = (\bar{r}_1(-a) + \bar{r}_2(-a)) \quad (5)$$

инвариантно относительно выбора ИСО. Начальное время $(-a)$ удобно выбрать так, чтобы начальная скорость взаимного удаления ЗМТ была нулевой, что в совокупности с требованием к ИСО разнонаправленности движения ЗМТ означает нулевые начальные скорости обеих ЗМТ в обоих случаях (1), (2):

$$\dot{\bar{r}}_\alpha(-a) = 0, \quad (6)$$

$$\dot{r}_\alpha(-a) = 0. \quad (7)$$

Центр масс сложной системы в случае (1) инерциален, так как она в этом случае замкнута. Начало пространственных координат выбираемой ИСО удобно поместить в этот центр масс:

$$m_1 \bar{r}_1 \equiv m_2 \bar{r}_2, \quad (8)$$

$$m_1 r_1(-a) = m_2 r_2(-a). \quad (9)$$

В отличие от тождества (8), обеспечить выполнение равенства (9) выбором ИСО можно лишь в начальный момент времени, так как в случае (2) центр масс сложной системы не инерциален по причине того, что она в этом случае не замкнута, а диссипативна, что проявляется в наличии излучения.

В силу (8) динамические переменные $\bar{r}_\alpha$ можно выразить через одну вспомогательную $r_0 = r_0(t)$:

$$\bar{r}_1 \equiv r_0, \quad \bar{r}_2 \equiv \frac{m_1}{m_2} r_0. \quad (10)$$

Подстановкой $\bar{r}_\alpha$ из (10) в (1) решение системы (1) сводится с учетом (10) к решению единственного нелинейного дифференциального уравнения

$$\ddot{r}_0 \cdot r_0^2 = C_0, \quad C_0 = \frac{C m_2^2}{m_1 (m_1 + m_2)^2}. \quad (11)$$

Из (5), (6), (8), (9), (10) имеем:

$$r_0(-a) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R_0, \quad \dot{r}_0(-a) = 0; \quad (12)$$

$$\bar{r}_1(-a) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R_0, \quad \bar{r}_2(-a) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R_0; \quad (13)$$

$$r_1(-a) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R_0, \quad r_2(-a) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R_0. \quad (14)$$

Для системы уравнений (1) ставится задача Коши с начальными условиями (6), (13). С учетом (10) эта задача сводится к задаче Коши (11), (12). Для системы уравнений (2) ставится задача Коши с начальными условиями (7), (14) и

$$\ddot{r}_\alpha(-a) = R_{2\alpha}. \quad (15)$$

В силу (6), (7), (13), (14) имеем:

$$\tilde{r}_\alpha(-a) = \dot{\tilde{r}}_\alpha(-a) = 0. \quad (16)$$

Научная задача состоит в проведении системного анализа по формулам типа (3), (4) на основе комплексного решения всех трех указанных задач Коши, причем особый отдельный интерес представляет определение поправок $\tilde{r}_\alpha(t)$ с заданными начальными условиями (16) на всем отрезке $t \in [-a, a]$, как поправок, непосредственно характеризующих влияние силы радиационного трения. Точное аналитическое решение этих задач Коши затруднительно ввиду их нелинейного характера. А численное решение затруднительно с такой точностью, которая позволяла бы учитывать поправки $\tilde{r}_\alpha(t)$ ввиду их малости. Эта трудность проявляется в малости входящих в (2) величин $m_{F\alpha}$, что затрудняет непосредственное решение уравнения (2). При таких расчетах влиянием силы радиационного трения обычно просто пренебрегают и вместо уравнений (2) решают уравнения (1), (11). Но использование метода быстрых разложений позволяет учитывать даже малые поправки $\tilde{r}_\alpha(t)$.

III. Теоретический анализ

Так как задача Коши (2), (7), (14), (15) сочетает в себе нечетные производные с четными, то регламентированные методом быстрых разложений для ее решения быстрые разложения универсальные. Третий порядок уравнения (2) требует в быстрых разложениях использования в качестве полиномиальных граничных функций таковых, которые имеют порядок p не ниже удвоенного порядка уравнения, в данном случае шестого (трехкратное по порядку старшей производной уравнения дифференцирование снижает порядок граничной функции на три и делает его не ниже порядка уравнения, в данном случае третьего). Для комплексного в смысле единообразности решения задачи Коши (2), (7), (14), (15) совместно с задачей Коши (11), (12) неизвестные динамические переменные $r_{\bar{\alpha}}(t)$ аппроксимируются быстрыми разложениями

$$r_{\bar{\alpha}}(t) \approx \hat{r}_{\bar{\alpha}pN}(t) = M_{\bar{\alpha}p}(t) + a_{\bar{\alpha}0} + \sum_{m=1}^N \left(a_{\bar{\alpha}m} \cos \frac{m\pi t}{a} + b_{\bar{\alpha}m} \sin \frac{m\pi t}{a} \right) \quad (17)$$

с учетом в рядах Фурье первых членов с номерами $m = \overline{0, N}$ и коэффициентами $a_{\bar{\alpha}0}$, $a_{\bar{\alpha}m}$, $b_{\bar{\alpha}m}$, где полиномиальные граничные функции $M_{\bar{\alpha}p}(t)$ для $r_{\bar{\alpha}}(t)$ соответственно одинакового четного порядка p представлены в следующем характерном для универсальных быстрых разложений виде

$$M_{\bar{\alpha}p}(t) = \sum_{q=0}^p A_{\bar{\alpha}q} P_q(t) \quad (18)$$

с неизвестными коэффициентами $A_{\bar{\alpha}q}$ при быстрых полиномах $P_q(t)$, рекуррентно по $q = \overline{1, p/2}$ определяемых равенствами

$$P_0(t) = \frac{t}{2a}, \quad P_{2q-1}(t) = \int_0^t P_{2q-2}(x) dx, \quad P_{2q}(t) = \int_0^t P_{2q-1}(x) dx - \frac{t}{a} \int_0^a P_{2q-1}(x) dx. \quad (19)$$

С учетом (18) быстрые разложения (17) имеют вид

$$r_{\bar{\alpha}}(t) \approx \hat{r}_{\bar{\alpha}pN}(t) = \sum_{q=0}^p A_{\bar{\alpha}q} P_q(t) + a_{\bar{\alpha}0} + \sum_{m=1}^N \left(a_{\bar{\alpha}m} \cos \frac{m\pi t}{a} + b_{\bar{\alpha}m} \sin \frac{m\pi t}{a} \right). \quad (20)$$

Дифференцирование (20) по t кратности $s = \overline{0, p}$ дает

$$r_{\bar{\alpha}}^{(s)}(t) \approx \hat{r}_{\bar{\alpha}pN}^{(s)}(t) = \sum_{q=0}^p A_{\bar{\alpha}q} P_q^{(s)}(t) + a_{\bar{\alpha}0} \delta_{s0} + \sum_{m=1}^N \left(\frac{m\pi}{a} \right)^s \left(a_{\bar{\alpha}m} \cos \left(\frac{m\pi t}{a} + \frac{s\pi}{a} \right) + b_{\bar{\alpha}m} \sin \left(\frac{m\pi t}{a} + \frac{s\pi}{a} \right) \right), \quad (21)$$

где $\delta_{..}$ – символ Кронекера. Подстановка $t = -a$ в (21) дает

$$r_{\bar{\alpha}}^{(s)}(-a) \approx \hat{r}_{\bar{\alpha}pN}^{(s)}(-a) = \sum_{q=0}^p A_{\bar{\alpha}q} P_q^{(s)}(-a) + a_{\bar{\alpha}0} \delta_{s0} + \sum_{m=1}^N \left(\frac{m\pi}{a} \right)^s \left(a_{\bar{\alpha}m} \cos \left(\frac{(s-2m)\pi}{2} \right) + b_{\bar{\alpha}m} \sin \left(\frac{(s-2m)\pi}{2} \right) \right), \quad s = \overline{0, p}. \quad (22)$$

Некоторые из величин $r_{\bar{\alpha}}^{(s)}(-a)$ в (22) непосредственно определяются начальными условиями (7), (12), (14), (15), а остальные находятся из дифференциальных уравнений (2), (11) путем их многократного дифференцирования с подстановкой $t = -a$. Точность быстрых разложений (20) быстро растет с увеличением величин p и N . При их заданных значениях набор из трех быстрых разложений $\hat{r}_{\bar{\alpha}pN}(t)$ однозначно определяется набором $3p + 6N + 6$ параметров $A_{\bar{\alpha}q}$, $a_{\bar{\alpha}0}$, $a_{\bar{\alpha}m}$, $b_{\bar{\alpha}m}$, $q = \overline{0, p}$, $m = \overline{1, N}$, которые находятся решением системы

$3p + 6N + 6$ нелинейных алгебраических уравнений. Первые $3p + 3$ уравнений этой системы получаются из (22) заменой $\approx$ на $=$:

$$\hat{r}_{\alpha pN}^{(s)}(-a) = r_{\bar{\alpha}}^{(s)}(-a), \quad s = \overline{0, p}. \quad (23)$$

Следующие $3N + 3$ уравнений получаются подстановкой $r_{\bar{\alpha}}(t) = \hat{r}_{\alpha pN}(t)$ в (2), (11) с последующим умножением полученных уравнений на $\cos \frac{m\pi t}{a}$ и последующим интегрированием полученных уравнений по переменной t в пределах от $-a$ до a (здесь $m = \overline{0, N}$):

$$\int_{-a}^a \left(m_{\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha pN} - m_{F\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha pN} \right) \left(\hat{r}_{1pN}(t) + \hat{r}_{2pN}(t) \right)^2 \cos \frac{m\pi t}{a} dt = \int_{-a}^a C \cos \frac{m\pi t}{a} dt, \quad (24)$$

$$\int_{-a}^a \ddot{\hat{r}}_{0pN} \cdot \hat{r}_{0pN}^2 \cos \frac{m\pi t}{a} dt = \int_{-a}^a C_0 \cos \frac{m\pi t}{a} dt. \quad (25)$$

Последние $3N$ уравнений получаются подстановкой $r_{\bar{\alpha}}(t) = \hat{r}_{\alpha pN}(t)$ в (2), (11) с последующим умножением полученных уравнений на $\sin \frac{m\pi t}{a}$ и последующим интегрированием полученных уравнений по переменной t в пределах от $-a$ до a (здесь $m = \overline{1, N}$):

$$\int_{-a}^a \left(m_{\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha pN} - m_{F\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha pN} \right) \left(\hat{r}_{1pN}(t) + \hat{r}_{2pN}(t) \right)^2 \sin \frac{m\pi t}{a} dt = \int_{-a}^a C \sin \frac{m\pi t}{a} dt \quad (26)$$

$$\int_{-a}^a \ddot{\hat{r}}_{0pN} \cdot \hat{r}_{0pN}^2 \sin \frac{m\pi t}{a} dt = \int_{-a}^a C_0 \sin \frac{m\pi t}{a} dt, \quad m = \overline{1, N}. \quad (27)$$

Система уравнений (23)–(27) декомпозируется на две независимые системы уравнений: первая – (23) с заменой $\bar{\alpha}$ на α , (24), (26) относительно неизвестных $A_{\alpha q}$, $a_{\alpha 0}$, $a_{\alpha m}$, $b_{\alpha m}$, $q = \overline{0, p}$, $m = \overline{1, N}$; вторая – (23) с заменой $\bar{\alpha}$ на 0, (25), (27) относительно неизвестных A_{0q} , a_{00} , a_{0m} , b_{0m} , $q = \overline{0, p}$, $m = \overline{1, N}$.

Каузальное представление модели основано на аппроксимации траекторий ЗМТ $r_{\alpha} = r_{\alpha}(t)$, $\bar{r}_{\alpha} = \bar{r}_{\alpha}(t)$ быстрыми разложениями

$$\hat{r}_{\alpha pN} \approx r_{\alpha}, \quad \hat{r}_{0pN} \approx r_0 \equiv \bar{r}_1, \quad \frac{m_1}{m_2} \hat{r}_{0pN} \approx \frac{m_1}{m_2} r_0 \equiv \bar{r}_2, \quad (28)$$

которые при заданных p и N образуют $(3p + 6N + 6)$ -параметрический набор. При этом производные $r_{\alpha}^{(n)}$, $\bar{r}_{\alpha}^{(n)}$, $\tilde{r}_{\alpha}^{(n)}$ произвольного порядка n естественно аппроксимировать соответствующими производными

$$\hat{r}_{\alpha pN}^{(n)} \approx r_{\alpha}^{(n)}, \quad \hat{r}_{0pN}^{(n)} \approx r_0^{(n)} \equiv \bar{r}_1^{(n)}, \quad \frac{m_1}{m_2} \hat{r}_{0pN}^{(n)} \approx \frac{m_1}{m_2} r_0^{(n)} \equiv \bar{r}_2^{(n)}, \quad (29)$$

$$\tilde{r}_{\alpha pN}^{(n)} \equiv \hat{r}_{0pN}^{(n)} - \hat{r}_{\alpha pN}^{(n)} \approx \tilde{r}_{\alpha}^{(n)}.$$

Характеристики Λ_{pN} , $\bar{\Lambda}_{pN}$ аксиологического представления моделей (1), (2) сложной системы, соответствующие целевым характеристикам Ψ , $\bar{\Psi}$ (3)–(4) системы с соответствующей декомпозицией на характеристики $\Lambda_{\alpha pN}$, $\bar{\Lambda}_{\alpha pN}$ аксиологического представления моделей обеих подсистем α с использованием индикаторной функции $\mathbf{1}_{\bullet}(\bullet)$

имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned}\Lambda_{pN} &= \Lambda_{pN}(r_{1\min}, r_{1\max}, r_{2\min}, r_{2\max}, v_{1\min}, v_{1\max}, v_{2\min}, v_{2\max}) = \\ &= \prod_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha pN}(r_{\alpha\min}, r_{\alpha\max}, v_{\alpha\min}, v_{\alpha\max}) = \\ &= \prod_{\alpha=1}^2 \left(\mathbf{1}_{(r_{\alpha\min}, r_{\alpha\max})}(\hat{r}_{\alpha pN}(a)) \mathbf{1}_{(v_{\alpha\min}, v_{\alpha\max})}(\dot{\hat{r}}_{\alpha pN}(a)) \right) \\ \bar{\Lambda}_{pN} &= \bar{\Lambda}_{pN}(r_{1\min}, r_{1\max}, r_{2\min}, r_{2\max}, v_{1\min}, v_{1\max}, v_{2\min}, v_{2\max}) = \\ &= \prod_{\alpha=1}^2 \bar{\Lambda}_{\alpha pN}(r_{\alpha\min}, r_{\alpha\max}, v_{\alpha\min}, v_{\alpha\max}) = \left(\mathbf{1}_{(r_{1\min}, r_{1\max})}(\hat{r}_{0pN}(a)) \mathbf{1}_{(v_{1\min}, v_{1\max})}(\dot{\hat{r}}_{0pN}(a)) \right) \times \\ &\quad \times \left(\mathbf{1}_{(r_{2\min}, r_{2\max})} \left(\frac{m_1}{m_2} \hat{r}_{0pN}(a) \right) \mathbf{1}_{(v_{2\min}, v_{2\max})} \left(\frac{m_1}{m_2} \dot{\hat{r}}_{0pN}(a) \right) \right)\end{aligned}\quad (30)$$

Во избежание дополнительного усложнения вычислений, хотя оно и обеспечило бы дополнительную их точность, для частного случая примем $p = 6$, $N = 1$. Согласно (28)–(31), в этом случае для системного анализа используется комплекс из аксиологических Λ_{61} , $\bar{\Lambda}_{61}$ и определяющих их каузальных $\hat{r}_{\bar{\alpha}61}(a)$, $\dot{\hat{r}}_{\bar{\alpha}61}(a)$ числовых характеристик, которые, в свою очередь, определяются набором $3 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 6 = 30$ параметров $A_{\bar{a}q}$, $a_{\bar{a}0}$, $a_{\bar{a}1}$, $b_{\bar{a}1}$, $q = \bar{0}, \bar{6}$, которые находятся решением системы 30 нелинейных алгебраических уравнений вида (23)–(27), конкретный вид которых определим далее.

Определенные (19) быстрые полиномы имеют вид

$$\begin{aligned}P_0(t) &= \frac{t}{2a}, \quad P_1(t) = \frac{t^2}{4a}, \quad P_2(t) = \frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12}, \quad P_3(t) = \frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24}, \\ P_4(t) &= \frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720}, \quad P_5(t) = \frac{t^6}{1440a} - \frac{at^4}{288} + \frac{7a^3t^2}{1440}, \\ P_6(t) &= \frac{t^7}{10080a} - \frac{at^5}{1440} + \frac{7a^3t^3}{4320} - \frac{31a^5t}{30240}.\end{aligned}\quad (32)$$

Производные $r_\alpha^{(s)}$, $s = \bar{3}, \bar{6}$ и $r_0^{(s)}$, $s = \bar{2}, \bar{6}$ получаются многократным дифференцированием (2), (11):

$$\ddot{r}_\alpha = \frac{1}{m_{F\alpha}} \left(m_\alpha \ddot{r}_\alpha - \frac{C}{(r_1 + r_2)^2} \right); \quad (33)$$

$$r_\alpha^{(4)} = \frac{1}{m_{F\alpha}} \left(m_\alpha \ddot{r}_\alpha + \frac{2C(\dot{r}_1 + \dot{r}_2)}{(r_1 + r_2)^3} \right); \quad (34)$$

$$r_\alpha^{(5)} = \frac{1}{m_{F\alpha}} \left(m_\alpha r_\alpha^{(4)} + \frac{2C}{(r_1 + r_2)^3} \left(\ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 - \frac{3(\dot{r}_1 + \dot{r}_2)^2}{r_1 + r_2} \right) \right); \quad (35)$$

$$r_\alpha^{(6)} = \frac{1}{m_{F\alpha}} \left(m_\alpha r_\alpha^{(5)} + \frac{2C}{(r_1 + r_2)^3} \left(\ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 - \frac{9(\dot{r}_1 + \dot{r}_2)(\ddot{r}_1 + \ddot{r}_2)}{r_1 + r_2} + \frac{12(\dot{r}_1 + \dot{r}_2)^3}{(r_1 + r_2)^2} \right) \right); \quad (36)$$

$$\ddot{r}_0 = \frac{C_0}{r_0^2}; \quad (37)$$

$$\ddot{r}_0 = -\frac{2C_0\dot{r}_0}{r_0^3}; \quad (38)$$

$$r_0^{(4)} = \frac{2C_0}{r_0^3} \left(\frac{3\dot{r}_0^2}{r_0} - \ddot{r}_0 \right); \quad (39)$$

$$r_0^{(5)} = \frac{2C_0}{r_0^3} \left(\frac{3\dot{r}_0}{r_0} \left(3\ddot{r}_0 - \frac{4\dot{r}_0^2}{r_0} \right) - \ddot{r}_0 \right); \quad (40)$$

$$r_0^{(6)} = \frac{2C_0}{r_0^3} \left(\frac{3}{r_0} \left(4\dot{r}_0 \left(\frac{\dot{r}_0}{r_0} \left(\frac{5\dot{r}_0^2}{r_0} - 6\ddot{r}_0 \right) + \ddot{r}_0 \right) + 3\ddot{r}_0^2 \right) - r_0^{(4)} \right). \quad (41)$$

Подстановка $t = -a$ в (33)–(41) с учетом (7), (12), (14), (15) дает:

$$\ddot{r}_\alpha(-a) = \frac{1}{m_{F\alpha}} \left(m_\alpha R_{2\alpha} - \frac{C}{R_0^2} \right); \quad (42)$$

$$r_\alpha^{(4)}(-a) = \frac{m_\alpha}{m_{F\alpha}} \ddot{r}_\alpha(-a); \quad (43)$$

$$r_\alpha^{(5)}(-a) = \frac{1}{m_{F\alpha}} \left(m_\alpha r_\alpha^{(4)}(-a) + \frac{2C}{R_0^3} (R_{21} + R_{22}) \right); \quad (44)$$

$$r_\alpha^{(6)}(-a) = \frac{1}{m_{F\alpha}} \left(m_\alpha r_\alpha^{(5)}(-a) + \frac{2C}{R_0^3} (\ddot{r}_1(-a) + \ddot{r}_2(-a)) \right); \quad (45)$$

$$\ddot{r}_0(-a) = \frac{C_0}{r_0^2(-a)}; \quad (46)$$

$$\ddot{r}_0(-a) = r_0^{(5)}(-a) = 0; \quad (47)$$

$$r_0^{(4)}(-a) = -\frac{2C_0}{r_0^3(-a)} \ddot{r}_0(-a); \quad (48)$$

$$r_0^{(6)}(-a) = -\frac{11C_0}{r_0^3(-a)} r_0^{(4)}(-a). \quad (49)$$

Из (21), (22), (32) получаем функции $\hat{r}_{\bar{\alpha}61}^{(s)}(t)$, $\hat{r}_{\bar{\alpha}61}^{(s)}(-a)$, $s = \overline{0,6}$ тридцати неизвестных параметров $A_{\bar{\alpha}q}$, $a_{\bar{\alpha}0}$, $a_{\bar{\alpha}1}$, $b_{\bar{\alpha}1}$, $q = \overline{0,6}$:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\bar{\alpha}61}(t) = & A_{\bar{\alpha}0} \frac{t}{2a} + A_{\bar{\alpha}1} \frac{t^2}{4a} + A_{\bar{\alpha}2} \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + A_{\bar{\alpha}3} \left(\frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24} \right) + \\ & + A_{\bar{\alpha}4} \left(\frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720} \right) + A_{\bar{\alpha}5} \left(\frac{t^6}{1440a} - \frac{at^4}{288} + \frac{7a^3t^2}{1440} \right) + \\ & + \frac{A_{\bar{\alpha}6}}{1440} \left(\frac{t^7}{7a} - at^5 + \frac{7a^3t^3}{3} - \frac{31a^5t}{21} \right) + a_{\bar{\alpha}0} + a_{\bar{\alpha}1} \cos \frac{\pi t}{a} + b_{\bar{\alpha}1} \sin \frac{\pi t}{a} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_{\bar{a}61}(t) = & \frac{A_{\bar{a}0}}{2a} + \frac{A_{\bar{a}1}t}{2a} + A_{\bar{a}2} \left(\frac{t^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + A_{\bar{a}3} \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + \\ & + A_{\bar{a}4} \left(\frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) + A_{\bar{a}5} \left(\frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720} \right) + \\ & + A_{\bar{a}6} \left(\frac{t^6}{1440a} - \frac{at^4}{288} + \frac{7a^3t^2}{1440} - \frac{31a^5}{30240} \right) + \left(\frac{\pi}{a} \right) \left(b_{\bar{a}1} \cos \frac{\pi t}{a} - a_{\bar{a}1} \sin \frac{\pi t}{a} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{\bar{a}61}(t) = & \frac{A_{\bar{a}1}}{2a} + \frac{A_{\bar{a}2}t}{2a} + A_{\bar{a}3} \left(\frac{t^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + \\ & + A_{\bar{a}4} \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + A_{\bar{a}5} \left(\frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) + \\ & + A_{\bar{a}6} \left(\frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720} \right) - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(a_{\bar{a}1} \cos \frac{\pi t}{a} + b_{\bar{a}1} \sin \frac{\pi t}{a} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\ddot{r}}_{\bar{a}61}(t) = & \frac{A_{\bar{a}2}}{2a} + \frac{A_{\bar{a}3}t}{2a} + A_{\bar{a}4} \left(\frac{t^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + A_{\bar{a}5} \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + \\ & + A_{\bar{a}6} \left(\frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24} + \frac{7a^3}{720} \right) + \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 \left(a_{\bar{a}1} \sin \frac{\pi t}{a} - b_{\bar{a}1} \cos \frac{\pi t}{a} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{r}_{\bar{a}61}^{(4)}(t) = & \frac{A_{\bar{a}3}}{2a} + \frac{A_{\bar{a}4}t}{2a} + A_{\bar{a}5} \left(\frac{t^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + \\ & + A_{\bar{a}6} \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \left(a_{\bar{a}1} \cos \frac{\pi t}{a} + b_{\bar{a}1} \sin \frac{\pi t}{a} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\hat{r}_{\bar{a}61}^{(5)}(t) = \frac{A_{\bar{a}4}}{2a} + \frac{A_{\bar{a}5}t}{2a} + A_{\bar{a}6} \left(\frac{t^2}{4a} - \frac{a}{12} \right) + \left(\frac{\pi}{a} \right)^5 \left(b_{\bar{a}1} \cos \frac{\pi t}{a} - a_{\bar{a}1} \sin \frac{\pi t}{a} \right); \quad (55)$$

$$\hat{r}_{\bar{a}61}^{(6)}(t) = \frac{A_{\bar{a}5}}{2a} + \frac{A_{\bar{a}6}t}{2a} - \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 \left(a_{\bar{a}1} \cos \frac{\pi t}{a} + b_{\bar{a}1} \sin \frac{\pi t}{a} \right); \quad (56)$$

$$\hat{r}_{\bar{a}61}(-a) = -\frac{1}{2} A_{\bar{a}0} + \frac{a}{4} A_{\bar{a}1} - \frac{a^3}{48} A_{\bar{a}3} + \frac{a^5}{480} A_{\bar{a}5} + a_{\bar{a}0} - a_{\bar{a}1}; \quad (57)$$

$$\dot{\hat{r}}_{\bar{a}61}(-a) = \frac{1}{2a} A_{\bar{a}0} - \frac{1}{2} A_{\bar{a}1} + \frac{a}{6} A_{\bar{a}2} - \frac{a^3}{90} A_{\bar{a}4} + \frac{a^5}{945} A_{\bar{a}6} - \left(\frac{\pi}{a} \right) b_{\bar{a}1}; \quad (58)$$

$$\ddot{\hat{r}}_{\bar{a}61}(-a) = \frac{1}{2a} A_{\bar{a}1} - \frac{1}{2} A_{\bar{a}2} + \frac{a}{6} A_{\bar{a}3} - \frac{a^3}{90} A_{\bar{a}5} + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 a_{\bar{a}1}; \quad (59)$$

$$\ddot{\ddot{\hat{r}}}_{\bar{a}61}(-a) = \frac{1}{2a} A_{\bar{a}2} - \frac{1}{2} A_{\bar{a}3} + \frac{a}{6} A_{\bar{a}4} - \frac{a^3}{90} A_{\bar{a}6} + \left(\frac{\pi}{a} \right)^3 b_{\bar{a}1}; \quad (60)$$

$$\hat{r}_{\bar{a}61}^{(4)}(-a) = \frac{1}{2a} A_{\bar{a}3} - \frac{1}{2} A_{\bar{a}4} + \frac{a}{6} A_{\bar{a}5} - \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 a_{\bar{a}1}; \quad (61)$$

$$\hat{r}_{\bar{\alpha}61}^{(5)}(-a) = \frac{1}{2a} A_{\bar{\alpha}4} - \frac{1}{2} A_{\bar{\alpha}5} + \frac{a}{6} A_{\bar{\alpha}6} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^5 b_{\bar{\alpha}1}; \quad (62)$$

$$\hat{r}_{\bar{\alpha}61}^{(6)}(-a) = \frac{1}{2a} A_{\bar{\alpha}5} - \frac{1}{2} A_{\bar{\alpha}6} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 a_{\bar{\alpha}m}. \quad (63)$$

Система уравнений (23)–(27), в которой функции $r_{\bar{\alpha}}^{(s)}(-a)$, $\hat{r}_{\bar{\alpha}61}^{(s)}(t)$, $\hat{r}_{\bar{\alpha}61}^{(s)}(-a)$ определены равенствами (7), (12), (14), (15), (42)–(63), принимает конкретный вид:

$$\hat{r}_{\bar{\alpha}61}^{(s)}(-a) = r_{\bar{\alpha}}^{(s)}(-a), \quad s = \overline{0, 6}; \quad (64)$$

$$\int_{-a}^a \left(m_{\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha 61}(t) - m_{F\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha 61}(t) \right) \left(\hat{r}_{161}(t) + \hat{r}_{261}(t) \right)^2 dt = 2aC; \quad (65)$$

$$\int_{-a}^a \left(m_{\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha 61}(t) - m_{F\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha 61}(t) \right) \left(\hat{r}_{161}(t) + \hat{r}_{261}(t) \right)^2 \cos \frac{\pi t}{a} dt = 0; \quad (66)$$

$$\int_{-a}^a \left(m_{\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha 61}(t) - m_{F\alpha} \ddot{\hat{r}}_{\alpha 61}(t) \right) \left(\hat{r}_{161}(t) + \hat{r}_{261}(t) \right)^2 \sin \frac{\pi t}{a} dt = 0; \quad (67)$$

$$\int_{-a}^a \ddot{\hat{r}}_{061}(t) \cdot \hat{r}_{061}^2(t) dt = 2aC_0; \quad (68)$$

$$\int_{-a}^a \ddot{\hat{r}}_{061}(t) \cdot \hat{r}_{061}^2(t) \cos \frac{\pi t}{a} dt = 0; \quad (69)$$

$$\int_{-a}^a \ddot{\hat{r}}_{061}(t) \cdot \hat{r}_{061}^2(t) \sin \frac{\pi t}{a} dt = 0. \quad (70)$$

IV. Результаты расчетов и их обсуждение

Для проверки работоспособности предлагаемой методики решения поставленной задачи системного анализа проведем вычислительный эксперимент для частного случая одинаковых ЗМТ с равными начальными ускорениями: $m_{\alpha} = m$, $Q_{\alpha} = Q$, $R_{2\alpha} = R_2$. Тогда $r_{\alpha} \equiv r$, $\bar{r}_{\alpha} \equiv r_0$, $\tilde{r}_{\alpha} \equiv \tilde{r} \equiv r_0 - r$. В целом основываясь на системе единиц СИ, расстояние все же будем измерять не в метрах, а в световых секундах (с. с.). Тогда пересчитанная постоянная скорости света оказывается единичной, а пересчитанная электрическая постоянная равна $\bar{\varepsilon}_0 = c^3 \varepsilon_0$ с.с.⁻³ кг⁻¹ с⁴ А². Для задания соотношения между массой и зарядом ЗМТ введем параметр

$$\theta = 6\pi \bar{\varepsilon}_0 \frac{m}{Q^2}. \quad (71)$$

С учетом (71) системы уравнений (2), (11) принимают соответственно вид:

$$(\theta \ddot{r} - \ddot{r}) r^2 = 0,375, \quad (72)$$

$$\ddot{r}_0 r_0^2 = 0,375/\theta. \quad (73)$$

При этом уравнение (73) есть уравнение (11) с правой частью $C_0 = 0,375/\theta$.

Из-за тормозящего действия силы радиационного трения начальное ускорение для уравнения (72) нужно задавать несколько меньшим, чем начальное ускорение, получающееся для уравнения (73):

$$R_2 = \xi \ddot{r}_0(-a), \quad 0 < \xi < 1. \quad (74)$$

Для данного частного случая примем следующие исходные данные задания задач Коши: $T = R_0 = 2$, $\theta = 1$, $\xi = 0,8$. Тогда $a = T/2 = 1$, а из (7), (12), (14), (15), (46), (74) определяются начальные условия для задач Коши для уравнений (73), (72):

$$r_0(-a) = R_0/2 = 1, \dot{r}_0(-a) = 0; \quad (75)$$

$$r(-a) = R_0/2 = 1, \dot{r}(-a) = 0, \ddot{r}(-a) = R_2 = \xi \ddot{r}_0(-a) = \frac{\xi C_0}{r_0^2(-a)} = 0,3. \quad (76)$$

Для приближенного решения задач Коши (72), (76) и (73), (75) в виде быстрых разложений (50) решается система уравнений (64)–(70) с учетом (42)–(50), (52), (53), (57)–(63), (75), (76), и полученное решение этой системы подставляется в (50). А подстановка этого же решения системы в (51)–(56) дает производные первых шести порядков данных приближенных решений данных задач Коши. В результате этих подстановок в (50)–(56) получаются функции $\hat{r}_{\alpha 61}^{(s)}(t) \equiv \hat{r}_{61}^{(s)}(t)$, $\hat{r}_{061}^{(s)}(t)$, $s = \overline{0,6}$, подстановка в которые $t = a$ дает соответствующие каузальные характеристики $\hat{r}_{61}^{(s)}(a)$, $\hat{r}_{061}^{(s)}(a)$, $s = \overline{0,6}$. После этого, согласно (29), определяются функции $\check{r}_{\alpha 61}^{(s)}(t) \equiv \check{r}_{61}^{(s)}(t) \equiv \hat{r}_{061}^{(s)}(t) - \hat{r}_{61}^{(s)}(t)$, $s = \overline{0,6}$, подстановка в которые $t = a$ дает дополнительные каузальные характеристики $\check{r}_{61}^{(s)}(a)$, $s = \overline{0,6}$. Но для определения аксиологических характеристик $\Lambda_{61} \equiv \Lambda_{\alpha 61}$, $\bar{\Lambda}_{61} \equiv \bar{\Lambda}_{\alpha 61}$ по формулам (30), (31) используются лишь каузальные характеристики $\hat{r}_{61}(a)$, $\dot{\hat{r}}_{61}(a)$, $\hat{r}_{061}(a)$, $\dot{\hat{r}}_{061}(a)$ при заданных исходных данных системного анализа $r_{\alpha \min} = r_{\min}$, $r_{\alpha \max} = r_{\max}$, $v_{\alpha \min} = v_{\min}$, $v_{\alpha \max} = v_{\max}$. Результаты расчета каузальных характеристик сведены в табл. 1, где в первой, четвертой и седьмой строках представлены обозначения системных характеристик, второй, пятой и восьмой – обозначения соответствующих каузальных характеристик, а в третьей, шестой и девятой – значения этих каузальных характеристик, являющиеся приближенными значениями соответствующих системных характеристик. Используемые для расчетов по формулам (30), (31) значения выделены полужирным шрифтом.

Пример нахождения значений аксиологических характеристик по формулам (30), (31), исходя из выделенных в табл. 1 значений каузальных характеристик, представлен в табл. 2. В первых четырех столбцах приведены исходные данные, в остальных двух – результаты. Наглядно динамика сложной системы показана на рис. 1 (верхняя кривая – график функции $\hat{r}_{061}(t) \approx r_0(t)$, средняя – функции $\hat{r}_{61}(t) \approx r(t)$, нижняя – функции $\check{r}_{61}(t) \approx \check{r}(t)$) и на рис. 2 (верхняя кривая – график функции $\dot{\hat{r}}_{061}(t) \approx \dot{r}_0(t)$, средняя – функции $\dot{\hat{r}}_{61}(t) \approx \dot{r}(t)$, нижняя – функции $\dot{\check{r}}_{61}(t) \approx \dot{\check{r}}(t)$). Функции $\check{r}_{61}(t)$ и $\dot{\check{r}}_{61}(t)$ показывают влияние силы радиационного трения на динамику системы.

Таким образом, в данном примере получается, что без учета силы радиационного трения полученная аксиологическая характеристика $\bar{\Lambda}_{61} = 1$ свидетельствует о своевременном достижении цели системы, но с учетом этой силы уточненная аксиологическая характеристика $\Lambda_{61} = 0$ свидетельствует об обратном, что и характеризует важность такого учета.

Таблица 1
Table 1

Результаты расчета каузальных характеристик
Results of calculation of causal characteristics

$r(a)$	$\dot{r}(a)$	$\ddot{r}(a)$	$\dddot{r}(a)$	$r^{(4)}(a)$	$r^{(5)}(a)$	$r^{(6)}(a)$
$\hat{r}_{61}(a)$	$\dot{\hat{r}}_{61}(a)$	$\ddot{\hat{r}}_{61}(a)$	$\dddot{\hat{r}}_{61}(a)$	$\hat{r}_{61}^{(4)}(a)$	$\hat{r}_{61}^{(5)}(a)$	$\hat{r}_{61}^{(6)}(a)$
1,488	0,441	0,170	-0,000	0,092	-0,011	-0,220
$r(a)$	$\dot{r}(a)$	$\ddot{r}(a)$	$\dddot{r}(a)$	$r^{(4)}(a)$	$r^{(5)}(a)$	$r^{(6)}(a)$
$\hat{r}_{061}(a)$	$\dot{\hat{r}}_{061}(a)$	$\ddot{\hat{r}}_{061}(a)$	$\dddot{\hat{r}}_{061}(a)$	$\hat{r}_{061}^{(4)}(a)$	$\hat{r}_{061}^{(5)}(a)$	$\hat{r}_{061}^{(6)}(a)$
1,624	0,537	0,143	-0,082	0,160	0,369	0,814
$\tilde{r}(a)$	$\dot{\tilde{r}}(a)$	$\ddot{\tilde{r}}(a)$	$\dddot{\tilde{r}}(a)$	$\tilde{r}^{(4)}(a)$	$\tilde{r}^{(5)}(a)$	$\tilde{r}^{(6)}(a)$
$\tilde{r}_{61}(a)$	$\dot{\tilde{r}}_{61}(a)$	$\ddot{\tilde{r}}_{61}(a)$	$\dddot{\tilde{r}}_{61}(a)$	$\tilde{r}_{61}^{(4)}(a)$	$\tilde{r}_{61}^{(5)}(a)$	$\tilde{r}_{61}^{(6)}(a)$
0,137	0,096	-0,027	-0,081	0,068	0,380	1,034

Таблица 2
Table 2

Пример нахождения значений аксиологических характеристик
Example of finding the values of axiological characteristics

$r_{\min}$	$r_{\max}$	$v_{\min}$	$v_{\max}$	Λ_{61}	$\bar{\Lambda}_{61}$
1,5	$+\infty$	0,5	$+\infty$	0	1

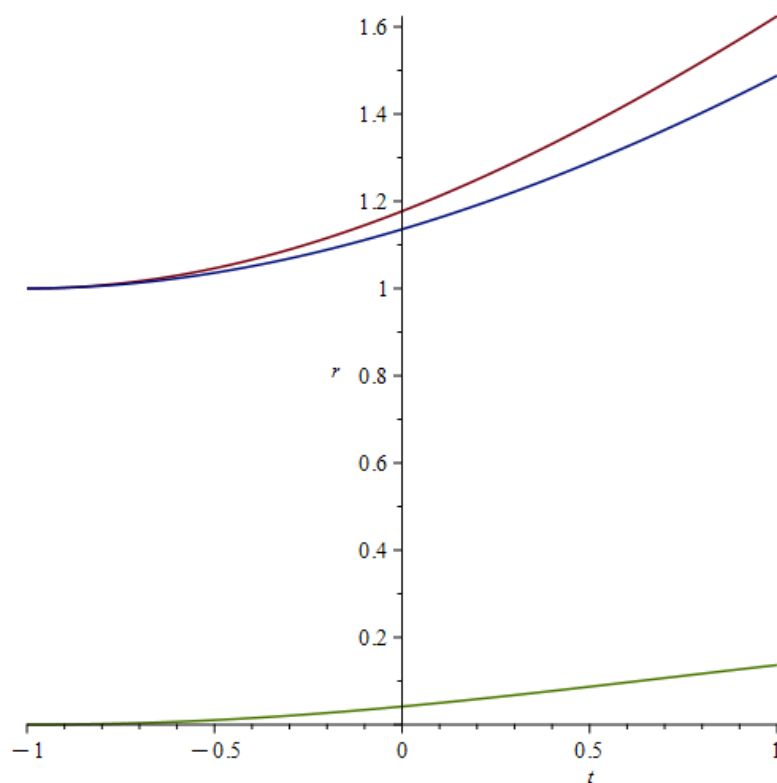


Рис. 1. Графики траекторий ЗМТ
Fig. 1. Graphs of CMP trajectories

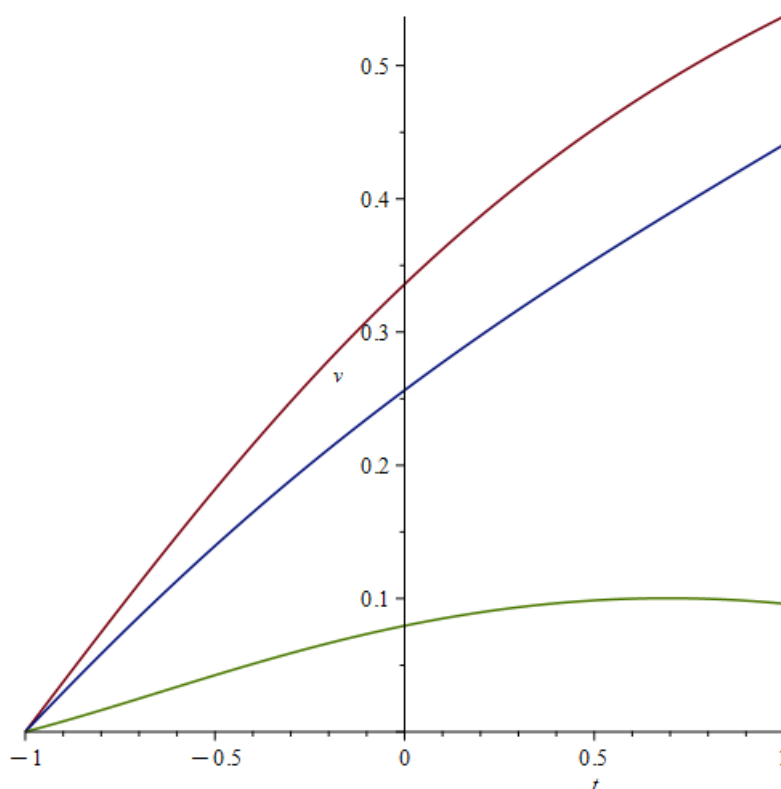


Рис. 2. Графики скоростей ЗМТ
Fig. 2. CMP speed graphs

V. Заключение

Итак, в настоящей работе разработан такой способ проведения с использованием метода быстрых разложений классического гармонического системного анализа на основе комплекса аксиологического и каузального представлений моделей при обработке информации в процессе математического моделирования дального действия сложных нелинейных систем ЗМТ, который показал свою работоспособность на примере системы взаимно отталкивающихся в вакууме с радиационным трением двух ЗМТ. Это означает распространение метода быстрых разложений в рамках классического гармонического системного анализа на основе комплекса аксиологического и каузального представлений моделей с математического моделирования близкого действия физических полей и сплошных материальных сред на математическое моделирование дального действия сложных нелинейных систем ЗМТ. Использование метода быстрых разложений при этом приводит к формированию каузального представления, основанного на аппроксимации траекторий ЗМТ быстрыми разложениями, параметры которых находятся решением системы нелинейных алгебраических уравнений, соответствующей системе нелинейных дифференциальных уравнений (в рассмотренном примере она имеет третий порядок), моделирующей дальное действие. Таким образом, цель работы достигнута. Тем самым на данном примере отработано комплексное применение методов системного анализа (посредством использования аксиологического представления) и методов классического гармонического анализа (посредством использования каузального представления) к задачам классической математической физики при математическом моделировании дального действия сложных нелинейных систем ЗМТ, что лежит в русле появления и развития классического гармонического системного анализа как одного из перспективных направлений системного анализа. Его методы естественно применять для анализа, синтеза и управления техническими устройствами, подчиняющимися законам классической физики, путем надлежащей обработки информации в процессе их

моделирования, как моделей динамики сложных систем, дающего возможность оценивать достижимость цели системой и другие родственные характеристики (например, своевременность достижения цели).

Список литературы

- Владимиров Ю.С. 2012. Между физикой и метафизикой: в 5 кн. Кн. 4: Вслед за Лейбницем и Махом. М.: ЛИБРОКОМ, 272 с.
- Волкова В.Н., Денисов А.А. 2021. Теория систем и системный анализ: учебник для вузов. 3-е изд. М.: Юрайт, 562 с.
- Гинзбург В.Л. 1969. Об излучении и силе радиационного трения при равномерно ускоренном движении заряда. *УФН*, Т. 98. Вып. 3: 569–585.
- Дубровин А.С. 2019. От дальнего действия Фоккера-Фейнмана к гиперконтинуальному дальнему действию. LV Всерос. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. М.: Изд-во РУДН, 38–41.
- Дубровин А.С. 2013а. Алгебраические свойства функций одномерных синусоидальных волн и пространство-время. *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, № 1: 5–19.
- Дубровин А.С. 2013б. Теоретико-групповое исследование гиперконтинуальных математических моделей. *Вестник Воронежского института ФСИИ России*, № 1: 71–76.
- Дубровин А.С. 2018. Гиперконтинуальная модель инертности и электрической силы заряженной материальной точки в вакууме. *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*, 5: 318–328.
- Дубровин А.С. 2023а. Гармонический системный анализ и обработка информации в модели дальнего действия взаимно отталкивающихся точечных зарядов. *Вестник Воронежского института ФСИИ России*, № 2: 42–49.
- Дубровин А.С. 2023б. Квантовый полумарковский системный анализ и обработка информации в стохастической модели с взаимно несовместимыми состояниями. *Вестник Воронежского института ФСИИ России*, № 3: 60–66.
- Дубровин А.С. 2024. Квантовый полумарковский системный анализ и обработка информации в стохастической модели с интерферирующими нецелевыми состояниями. *Вестник воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, № 2: 25–38.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. 2020. Теоретическая физика: учебное пособие: в 10 томах; под редакцией Л. П. Питаевского. 9-е изд., стереотип. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2020. Том 2: Теория поля, 508 с.
- Лешонков О.В. 2018. Исследование некоторых математических моделей методом быстрых разложений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 16 с.
- Лыков А.В. 1967. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 600 с.
- Моисеев Н.Н. 2013. Математические задачи системного анализа М.: URSS, 532 с.
- Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. 1989. Введение в системный анализ: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 367 с.
- Соколов И.В. 2009. Перенормировка уравнения Лоренца-Абрагама-Дирака для радиационной силы в классической электродинамике. *ЖЭТФ*, Т. 136. Вып. 2(8): 247–253.
- Стейн И., Вейс Г. 1974. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах: пер. с англ. В.В. Жаринова; под ред. Е.Д. Соломенцева и С.Б. Стечкина. М.: Мир, 332 с.
- Тарасенко Ф.П. 2004. Прикладной системный анализ (Наука и искусство решения проблем): учебник. Томск: Изд-во Том. ун-та, 186 с.
- Тимошенко С.П., Гудьер Дж. 1979. Теория упругости: пер. с англ.; под ред. Г. С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 560 с.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1999. Уравнения математической физики: учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 799 с.
- Толстов Г.П. 1980. Ряды Фурье. 3-е изд., испр. М.: Наука, 381 с.
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. 1977. Электродинамика: пер. с англ.; под ред. Я. А. Смородинского. 2-е изд. М.: Мир, 350 с.
- Чернышов А.Д. 2014. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, № 1. Т. 54: 13–24.
- Чернышов А.Д., Горайнов В.В., Лешонков О.В., Соболева Е.А., Никифорова О.Ю. 2019. Сравнение

скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье. *Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, № 1: 27–34.

Poisson E. 1999. An introduction to the Lorentz-Dirac equation. arXiv preprint arXiv:gr-qc/9912045. DOI: 10.48550/arXiv.gr-qc/9912045.

Wheeler J.A., Feynman R.P. 1945. Interaction with absorber as the mechanism of radiation. *Rev. Mod. Phys*, Vol. 17: 157–181.

References

- Vladimirov Yu.S. 2012. Between physics and metaphysics: in 5 books. Book 4: Following Leibniz and Mach. Moscow: LIBROKOM, 272 p.
- Volkova V.N., Denisov A.A. 2021. Systems theory and systems analysis: textbook for universities. 3rd ed. Moscow: Yurait, 562 p.
- Ginzburg V.L. 1969. On radiation and the force of radiation friction during uniformly accelerated motion of a charge. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, Vol. 98. Issue 3: 569–585.
- Dubrovina A.S. 2019. From Fokker-Feynman action at a distance to hypercontinuous action at a distance. LV All-Russian Conf. on the problems of dynamics, particle physics, plasma physics and optoelectronics: abstracts of reports. Moscow: RUDN University Press, 38–41.
- Dubrovina A.S. 2013a. Algebraic properties of one-dimensional sinusoidal wave functions and space-time. *VSU Bulletin. Series: Physics. Mathematics*, No. 1: 5–19.
- Dubrovina A.S. 2013b. Group-theoretical study of hypercontinuous mathematical models. *Bulletin of the Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia*, No. 1: 71–76.
- Dubrovina A.S. 2018. Hypercontinuous model of inertia and electric force of a charged material point in vacuum. *International Journal of Applied and Fundamental Research*, 5: 318–328.
- Dubrovina A.S. 2023a. Harmonic system analysis and information processing in the long-range model of mutually repulsive point charges. *Bulletin of the Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia*, No. 2: 42–49.
- Dubrovina A.S. 2023b. Quantum semi-Markov system analysis and information processing in a stochastic model with mutually incompatible states. *Bulletin of the Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia*, No. 3: 60–66.
- Dubrovina A.S. 2024. Quantum semi-Markov system analysis and information processing in a stochastic model with interfering non-target states. *Bulletin of the Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, No. 2: 25–38.
- Landau L.D., Lifshits E.M. 2020. Theoretical Physics: a textbook: in 10 volumes; edited by L. P. Pitaevsky. 9th ed., stereotype. Moscow: FIZMATLIT, 2020. Volume 2: Field Theory, 508 p.
- Leshonkov O. V. 2018. Study of Some Mathematical Models by the Fast Expansion Method: Abstract of Cand. Sci. (Phys. and Mathematics). Voronezh, 16 p.
- Lykov A.V. 1967. Theory of Heat Conduction. Moscow: Higher School, 600 p.
- Moiseev N. N. 2013. Mathematical Problems of Systems Analysis Moscow: URSS, 532 p.
- Peregudov F.I., Tarasenko F.P. 1989. Introduction to Systems Analysis: a textbook for universities. M.: Vyssh. shk., 367 p.
- Sokolov I.V. 2009. Renormalization of the Lorentz-Abraham-Dirac Equation for the Radiation Force in Classical Electrodynamics. *JETP*, Vol. 136. Issue 2(8): 247–253.
- Stein I., Weiss G. 1974. Introduction to Harmonic Analysis on Euclidean Spaces: trans. from English by V.V. Zharinov; edited by E.D. Solomentsev and S.B. Stechkin. M.: Mir, 332 p.
- Tarasenko F.P. 2004. Applied Systems Analysis (Science and Art of Problem Solving): Textbook. Tomsk: Tomsk University Press, 186 p.
- Timoshenko S.P., Goodyer J. 1979. Theory of Elasticity: trans. from English; edited by G.S. Shapiro. 2nd ed. Moscow: Nauka. Chief Ed. of Phys.-Math. Literature, 560 p.
- Tikhonov A.N., Samarskii A.A. 1999. Equations of Mathematical Physics: Textbook. Manual. 6th ed., corrected and enlarged. Moscow: Moscow State University Press, 799 p.
- Tolstov G.P. 1980. Fourier Series. 3rd ed., corrected. Moscow: Nauka, 381 p.
- Feynman R., Leighton R., Sands M. 1977. Electrodynamics: trans. from English; edited by Ya.A. Smorodinskii. 2nd ed. M.: Mir, 350 p.
- Chernyshov A.D. 2014. The method of fast expansions for solving nonlinear differential equations. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, No. 1. Vol. 54: 13–24.
- Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Leshonkov O.V., Soboleva E.A., Nikiforova O.Yu. 2019. Comparison of

the convergence rate of fast expansions with expansions in the classical Fourier series. *VSU Bulletin. Series: System Analysis and Information Technology*, No. 1: 27–34.

Poisson E. 1999. An introduction to the Lorentz-Dirac equation. arXiv preprint arXiv:gr-qc/9912045. DOI: 10.48550/arXiv.gr-qc/9912045.

Wheeler J.A., Feynman R.P. 1945. Interaction with absorber as the mechanism of radiation. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 17: 157–181.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.06.2025

Поступила после рецензирования 25.08.2025

Принята к публикации 04.09.2025

Received June 15, 2025

Revised August 25, 2025

Accepted September 04, 2025

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Дубровин Анатолий Станиславович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры вычислительной техники и информационных систем, Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Россия

Сумин Виктор Иванович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной техники и информационных систем, Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Россия

Кравченко Андрей Сергеевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительной техники и информационных систем, Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anatoly S. Dubrovin, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Computer Science and Information Systems, Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Viktor I. Sumin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Computer Science and Information Systems, Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Andrey S. Kravchenko, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computer Science and Information Systems, Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia