УДК 519.1
DOI 10.18413/2687-0932-2020-47-1-126-134

КОМБИНАТОРИКА УПОРЯДОЧЕННЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

COMBINATORICS AN ORDERED MULTIPLICATIVE DECOMPOSITIONS

В.В. Румбешт, Е.В. Бурданова
V.V. Rumbesht, E.V. Burdanova

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85

Belgorod National Research University, 85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia

e-mail: rumbesht@bsu.edu.ru, burdanova @bsu.edu.ru

Аннотация
Статья посвящена нахождению решения комбинаторных задач: нахождению количества всех возможных разложений целого числа $r > 1$ в упорядоченное произведение n целых сомножителей и нахождению количества всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение. Ее целью является установление аналитической зависимости количества всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей от параметров r и n. При достижении цели непосредственно получаем решение первой задачи, а решение второй находится как сумма количества всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей, где n пробегает натуральный ряд. В статье показано, что количество таких разложений зависит скорее не от величины числа r, а набора показателей степеней в его каноническом разложении. Вводится отношение эквивалентности, позволяющее разбить функцию количества всех разложений числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей на классы так, чтобы каждому классу взаимно однозначно соответствовала функция количества матриц особого вида. Далее показано, как осуществить подсчет количества таких матриц, что в результате привело к выводу искомой формулы.

Abstract
The article is devoted to finding the solution of combinatorial problems: finding the number of all possible decompositions of an integer $r > 1$ into an ordered set of integer multipliers and finding the number of all possible decompositions of a number r into an ordered set of integer multipliers. Its purpose is to establish an analytical dependence of the number of all possible expansions of a number r in the ordered set of n integer factors on the parameters r and n. Upon reaching the goal, we directly obtain the solution of the first problem, and the solution of the second problem is the sum of the number of all possible expansions of the number r into the ordered set of n integer factors, where n run the natural series. The article shows that the number of such expansions does not depend on the value of the number r, but rather on the set of exponents in its canonical decomposition. We introduce an equivalence relation that allows us to divide the function of the number of all expansions of a number r into an ordered set of n integer factors into classes so that each class corresponds to the function of the number of matrices of a special kind. The following shows how to count the number of such matrices, which resulted in the conclusion of the desired formula.

Ключевые слова: упорядоченное мультипликативное разложение, комбинаторная задача, каноническое разложение, количество n-профилей числа r.
Keywords: ordered multiplicative decomposition, combinatorial problem, canonical decomposition, number of n-profiles of r.

Введение

Основная теорема арифметики устанавливает единственность разложения целого числа $r>1$ в произведение простых сомножителей с точностью до порядка их следования и дает формулу так называемого канонического разложения $r=\prod_{j=1}^{m} p_j^{a_j}$, где p_j – простое число, $p_i \neq p_j$, если $i \neq j$, a_j – кратность вхождения p_j в это разложение [Виноградов, 2018].

Формула канонического разложения дает очевидные решения таких задач, как нахождение количества всех возможных делителей числа, а также их перечисление [Бухштаб, 2015], нахождение количества разбиений числа в упорядоченное произведение простых сомножителей; вычисление наибольших общих делителей и наименьших общих кратных [Виленкин и др., 2019], значений функции Эйлера [Зуланке, Онищик, 2020; Петровский, 2018.] и т. п.

Кроме канонического разложения числа существуют более общие случаи: разложение в упорядоченное или неупорядоченное произведение с фиксированным или нефиксированным числом целых сомножителей [Гринблат, 2017]. Такие разложения далеко не единственные. Этот факт порождает комбинаторные задачи их перечисления и подсчета их количества [Скхипани, Елиа, 2011]. Без сомнения, эти задачи являются фундаментальными.

Помимо фундаментального характера такие задачи имеют и прикладное значение. Например, для исследования свойств последовательностей, порождаемых с использованием каскадного метода [Love Forsberg, 2016; Румбешт, Ядута, 2015], представляют интерес следующие задачи.

1. Дано целое число $r>1$, представленное своим каноническим разложением. Найти количество всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей, каждый из которых больше 1.

2. При тех же исходных данных найти количество всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение целых сомножителей, каждый из которых больше единицы.

Даня статья посвящена нахождению решения этих задач, и ее целью является установление аналитической зависимости количества всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей от параметров r и n.

При достижении цели непосредственно получаем решение первой задачи, а решение второй находится как сумма количества всех возможных разложений числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей, где n пробегает натуральный ряд.

Формальная постановка задачи

Определение 1. Дано целое число $r>1$. Кортеж $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$, составленный из целых чисел, назовем n-профилем числа r или разложением числа r в упорядоченное произведение n целых сомножителей, если $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_i > 1$ и $r=\prod_{i=1}^{n} r_i$.

Принятие термина «n-профиль числа r» обусловлено только дальнейшим применением результатов статьи для исследования свойств последовательностей, порожденных применением каскадного метода.

Обозначим символом $\Omega_{r,n}$ множество всех возможных n-профилей числа r. В зависимости от r и n множество $\Omega_{r,n}$ является либо конечным, либо пустым. Например, $\Omega_{30,1}=\{(30)\}$; $\Omega_{30,2}$={(2, 15), (15, 2), (3, 10), (10, 3), (5, 6), (6, 5)}; $\Omega_{30,3}$={(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)}; $\Omega_{30,n}=\varnothing$ для всех $n \geq 4$.

Определение 2. Функцию f, определенную на декартовом произведении множества целых больших 1 и множества целых положительных чисел, принимающую значения $f(r,n)$, равные мощности множества $\Omega_{r,n}$, назовем функцией количества n-профилей числа r.

Следует отметить, что это значение функции $f(r,n)$ зависит скорее не от величины параметра r, а от набора показателей степеней a_j в его каноническом разложении. Упомянутый набор в общем случае представляет собой мультимножество [Петровский, 2018; Румбешт, 2016].

Исходя из определения функции количества n-профилей числа r, можно априорно указать ряд ее свойств. Пусть $r = \prod_{j=1}^{m} p_j^{a_j}$ – каноническое разложение r, и $h = \sum_{j=1}^{m} a_j$, тогда, руководствуясь соображениями о возможности разбиения списка из h элементов на n непустых частей, практически очевидно, что:

1) если $1 \le n \le h$, то возможность хотя бы одного разбиения существует и $f(r,n) > 0$;

2) если $n > h$, то невозможно разбить список из h элементов на n непустых частей и $f(r,n) = 0$;

3) если $n = 1$, то возможен только один вариант разбиения и $f(r,1) = 1$;

4) если $n = h$, то имеем разложение в произведение простых сомножителей, которое можно рассматривать как перестановку с повторениями, в которой кратности повторения элементов суть $a_1, a_2, \dots, a_m$, следовательно $f(r,h) = P_h(a_1, a_2, \dots, a_m) = \dfrac{h!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!}$ – количество перестановок с повторениями [Румбешт, Ядута, 2014; Thomas, 2009].

В справедливости перечисленных свойств не сложно убедится на рассмотренном выше примере множеств всех возможных n-профилей числа $r = 30 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ [Kálmán Cziszter Mátyás Domokos, 2016; Wenbo Sun, 2018].

Целые числа $r > 1$ и $r' > 1$ будем считать эквивалентными, если равны мультимножества показателей степеней простых сомножителей, входящих в канонические разложения r и r'. Факт эквивалентности r и r' запишем как $r \underset{a_1, a_2, \dots, a_m}{\cong} r'$, где $a_1, a_2, \dots, a_m$ – неубывающая последовательность. Например, для числа $20580 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^3$ и числа $212355 = 3^3 \cdot 5^1 \cdot 11^2 \cdot 13^1$ имеет место $20580 \underset{1,1,2,3}{\cong} 212355$. Введенное отношение разбивает множество целых больших 1 на классы $a_1, a_2, \dots, a_m$-эквивалентности. При принадлежности числа r такому классу будем говорить, что оно $a_1, a_2, \dots, a_m$-эквивалентно [Gaultier Lambert Dmitry Ostrovsky Nick Simm, 2018; Shuhei Mano, 2018].

Это же отношение разбивает функцию количества n-профилей числа r, как множества троек вида $(r, n, f(r,n))$, на классы так, что в один и тот же класс попадают $(r, n, f(r,n))$ и $(r', n, f(r',n))$, если $r \underset{a_1, a_2, \dots, a_m}{\cong} r'$. Таким классам $a_1, a_2, \dots, a_m$-эквивалентности взаимно однозначно соответствуют функции $f_{a_1, a_2, \dots, a_m}$ определенные на целых положительных числах, принимающие значения $f_{a_1, a_2, \dots, a_m}(n) = f(r,n)$ для всех $a_1, a_2, \dots, a_m$-эквивалентных чисел r.

Таким образом, функцию количества n-профилей числа r, можно определить в терминах функций $f_{a_1, a_2, \dots, a_m}$ как $f(r,n) = f_{a_1, a_2, \dots, a_m}(n)$, если r является $a_1, a_2, \dots, a_m$-эквивалентным.

Определение 3. Функцию ψ, определенную на множестве целых больших 1, значения которой $\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f(r,n)$, назовем функцией количества всех профилей числа r.

Очевидно, что $\psi(r) = \sum_{n=1}^{h} f_{a_1,a_2,\ldots,a_m}(n)$, где r является $a_1, a_2, \ldots, a_m$-эквивалентным, а $h = \sum_{j=1}^{m} a_j$.

Выражение f и ψ в терминах функций $f_{a_1,a_2,\ldots,a_m}$ приводит к следующей постановке задачи, решение которой необходимо и достаточно для достижения цели статьи. Требуется вывести формулу для вычисления значений функции $f_{a_1,a_2,\ldots,a_m}$ при заданном параметре $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Вывод формулы для вычисления функции $f_{a_1,a_2,\ldots,a_m}$

Установим взаимно однозначное соответствие между элементами множества $\Omega_{r,n}$ и матрицами специального вида.

По определению 1 n-профиль числа r есть кортеж $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$, в котором $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_i > 1$ и $r = \prod_{i=1}^{n} r_i$.

Поскольку $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_i > 1$ и r_i делит r, то каноническое разложение r_i содержит сомножители из непустого подмножества m-элементного набора попарно различных простых чисел $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, входящих в каноническое разложение r. Представим компоненты кортежа $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ в виде их канонических разложений, при необходимости дополненных так, чтобы каждое из $p_1, p_2, \ldots, p_m$ обязательно присутствовало в разложениях, пусть даже и в нулевой степени.

Получим:

$$\left(r_1 = \prod_{j=1}^{m} p_j^{q_{1,j}},\ r_2 = \prod_{j=1}^{m} p_j^{q_{2,j}}, \ldots, r_n = \prod_{j=1}^{m} p_j^{q_{n,j}} \right). \tag{1}$$

Заметим, что в общем случае разложение $r_i = \prod_{j=1}^{m} p_j^{q_{i,j}}$ нельзя назвать каноническим, поскольку некоторые, но не все, $q_{i,j}$ могут быть равны 0. Тем не менее оно единственно.

Из цепочки равенств

$$r = \prod_{i=1}^{n} r_i = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} p_j^{q_{i,j}} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\sum_{i=1}^{n} q_{i,j}} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{a_j}$$

следует условие:

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}:\ \sum_{i=1}^{n} q_{i,j} = a_j. \tag{2}$$

Учитывая, что только некоторые, но не все, $q_{i,j}$ при любом i и фиксированном j могут быть равны нулю, получим еще одно условие:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}:\ \sum_{j=1}^{m} q_{i,j} \neq 0. \tag{3}$$

Из показателей степеней $q_{i,j}$ составим матрицу Q, имеющую размерность $n \times m$:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,m} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & q_{n,m} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

столбцам которой поставим в соответствие простые числа из канонического разложения r, так чтобы j-тому столбцу соответствовало число p_j.

Таким образом, если зафиксировать порядок следования p_j, согласующийся с порядком следования $a_1, a_2, \dots, a_m$ (как мы помним, это неубывающая последовательность), то n-профилю числа r ставится в соответствие единственная матрица Q. И, наоборот, если элементы матрицы Q являются целыми неотрицательными числами, такими, чтобы выполнялись условия (2) и (3) при аналогично фиксированном порядке следования $p_1, p_2, \dots, p_m$, то по ней однозначно можно построить n-профиль числа r, используя формулу (1).

Взаимно однозначное соответствие между элементами множества $\Omega_{r,n}$ и матрицами вида (4), для которых выполняются условия (2) и (3), позволяет сформулировать задачу нахождения значения $f_{a_1,a_2,\dots,a_m}(n)$ как количества таких матриц.

Итак, $f_{a_1,a_2,\dots,a_m}(n)$ – количество матриц размерностью $n \times m$, удовлетворяющих ранее определенным условиям. Символом $g_{a_1,a_2,\dots,a_m}$ обозначим функцию количества матриц, удовлетворяющих этим же условиям, за исключением того, что в них допускаются строки, сумма элементов которых равна нулю (все элементы таких строк нулевые).

Для функции $g_{a_1,a_2,\dots,a_m}$ характерно, что

$$g_{a_1,a_2,\dots,a_m}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot f_{a_1,a_2,\dots,a_m}(n-k). \tag{5}$$

Это выражение продиктовано следующими соображениями. Набор матриц, не имеющих ограничений на суммы элементов строк, составлен из матриц, у которых k строк имеют сумму элементов равную 0 и $n-k$ строк с суммой элементов большей 0, для всех k от 0 до $n-1$.

Зафиксируем значение k. По определению $f_{a_1,a_2,\dots,a_m}(n-k)$ – количество матриц без нулевых строк с размерностью $(n-k)\times m$. Каждая такая матрица может быть преобразована в матрицу с размерностью $n \times m$ путем добавления k строк, содержащих одни нули. Количество способов таких преобразований равно числу k-элементных подмножеств множества из n элементов, то есть биноминальному коэффициенту C_n^k.

С другой стороны, значение функции $g_{a_1,a_2,\dots,a_m}(n)$ вычисляется как количество целых неотрицательных решений системы уравнений:

$$\begin{cases} q_{1,1} + q_{2,1} + \cdots + q_{n,1} = a_1 \\ q_{1,2} + q_{2,2} + \cdots + q_{n,2} = a_2 \\ \vdots \\ q_{1,m} + q_{2,m} + \cdots + q_{n,m} = a_m \end{cases}$$

Очевидно, что

$$g_{a_1,a_2,\dots,a_m}(n) = \prod_{i=1}^{m} \overline{C}_n^{a_i} = \prod_{i=1}^{m} C_{a_i+n-1}^{a_i}. \tag{6}$$

В формуле (6) под знаком произведения находится величина $\overline{C}_n^{a_i} = C_{a_i+n-1}^{a_i}$ – количество сочетаний с повторениями из n элементов по a_i [Холл, 1970], устанавливающая количество решений i-того уравнения системы [Ежов и др., 1977].

Для проведения дальнейших рассуждений сформулируем и докажем утверждение о взаимном обращении функций специального вида, определяющее одно из большого многообразия комбинаторных тождеств с биноминальными коэффициентами [Риордан, 1982].

Утверждение (правило обращения). Пусть f и g – функции, определенные на множестве целых положительных чисел и принимающие целые неотрицательные значения. Если $g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot f(n-k)$ для $\forall n \in \{1, 2, \ldots\}$, то $f(n)=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \cdot C_n^m \cdot g(n-m)$, и наоборот, если $f(n)=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \cdot C_n^m \cdot g(n-m)$ для $\forall n \in \{1, 2, \ldots\}$, то $g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot f(n-k)$.

Доказательство. Выполним подстановку $f(n)=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \cdot C_n^m \cdot g(n-m)$ в формулу $g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot f(n-k)$:

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(C_n^k \cdot \sum_{m=0}^{n-k-1}(-1)^m \cdot C_{n-k}^m \cdot g(n-k-m)\right)=$$
$$=C_n^0 \cdot \left(C_n^0 \cdot g(n)-C_n^1 \cdot g(n-1)+\ldots+(-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1} \cdot g(1)\right)+$$
$$+C_n^1 \cdot \left(C_{n-1}^0 \cdot g(n-1)-C_{n-1}^1 \cdot g(n-2)+\ldots+(-1)^{n-2} \cdot C_{n-1}^{n-2} \cdot g(1)\right)+\ldots+C_n^{n-1} \cdot C_1^0 \cdot g(1).$$

Раскроем скобки, сгруппируем слагаемые по значениям $g(i)$ для $i=1, 2, \ldots n$, и в каждом таком наборе слагаемых вынесем $g(i)$ за скобки. В результате получим:

$$C_n^0 \cdot \left(C_n^0 \cdot g(n)-C_n^1 \cdot g(n-1)+\ldots+(-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1} \cdot g(1)\right)+$$
$$+C_n^1 \cdot \left(C_{n-1}^0 \cdot g(n-1)-C_{n-1}^1 \cdot g(n-2)+\ldots+(-1)^{n-2} \cdot C_{n-1}^{n-2} \cdot g(1)\right)+\ldots+C_n^{n-1} \cdot C_1^0 \cdot g(1)=$$
$$=C_n^0 \cdot C_n^0 \cdot g(n)-\left(C_n^0 \cdot C_n^1-C_n^1 \cdot C_{n-1}^0\right) \cdot g(n-1)+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1} \cdot \left(C_n^0 \cdot C_n^{n-1}-C_n^1 \cdot C_{n-1}^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1} \cdot C_1^0\right) \cdot g(1)=$$
$$=\sum_{t=0}^{n-1}\left((-1)^t \cdot g(n-t) \cdot \sum_{k=0}^{t}(-1)^k \cdot C_n^k \cdot C_{n-k}^{t-k}\right)$$

Несложно видеть, что для $0 \le k \le t < n$ имеет место равенство

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^{t-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(t-k)!(n-t)!}=\frac{n!}{k!(t-k)!(n-t)!}=\frac{n!}{t!(n-t)!} \cdot \frac{t!}{k!(t-k)!}=C_n^t \cdot C_t^k.$$

Для фиксированных чисел n и t величина C_n^t постоянная и

$$\sum_{k=0}^{t}(-1)^k \cdot C_n^t \cdot C_t^k=C_n^t \cdot \sum_{k=0}^{t}(-1)^k \cdot C_t^k.$$

Таким образом,

$$\sum_{t=0}^{n-1}\left((-1)^t \cdot g(n-t) \cdot \sum_{k=0}^{t}(-1)^k \cdot C_n^k \cdot C_{n-k}^{t-k}\right)=\sum_{t=0}^{n-1}\left((-1)^t \cdot g(n-t) \cdot C_n^t \cdot \sum_{k=0}^{t}(-1)^k \cdot C_t^k\right).$$

Учитывая свойство суммы знакопеременных биноминальных коэффициентов: $\sum_{k=0}^{t}(-1)^k \cdot C_t^k=\begin{cases}1, \textit{если } t=0\\ 0, \textit{если } t>0\end{cases}$, получим тавтологию:

$$\sum_{t=0}^{n-1}\left((-1)^t \cdot g(n-t) \cdot C_n^t \cdot \sum_{k=0}^{t}(-1)^k \cdot C_t^k\right)=g(n).$$

Далее выполним подстановку $g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \cdot f(n-k)$ в формулу $f(n)=\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \cdot C_n^m \cdot g(n-m)$ и проведем аналогичные действия:

$$f(n)=\sum_{m=0}^{n-1}\left((-1)^m C_n^m\cdot\sum_{k=0}^{n-m-1}C_{n-m}^k\cdot f(n-m-k)\right)=$$

$$=C_n^0\cdot\left(C_n^0\cdot f(n)+C_n^1\cdot f(n-1)+\ldots+C_n^{n-1}\cdot f(1)\right)-$$

$$-C_n^1\cdot\left(C_{n-1}^0\cdot f(n-1)+C_{n-1}^1\cdot f(n-2)+\ldots+C_{n-1}^{n-2}\cdot f(1)\right)+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot C_n^{n-1}\cdot C_1^0\cdot f(1)=$$

$$=C_n^0\cdot C_n^0\cdot f(n)+\left(C_n^0\cdot C_n^1-C_n^1\cdot C_{n-1}^0\right)\cdot f(n-1)+\ldots+$$

$$+\left(C_n^0\cdot C_n^{n-1}-C_n^1\cdot C_{n-1}^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot C_n^{n-1}\cdot C_1^0\right)\cdot f(1)=$$

$$=\sum_{t=0}^{n-1}\left(f(n-t)\cdot\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot C_{n-k}^{t-k}\right)=\sum_{t=0}^{n-1}\left(f(n-t)\cdot C_n^t\cdot\sum_{k=0}^{t}(-1)^k\cdot C_t^k\right)=f(n).$$

В результате снова получилась тавтология. Что и требовалось доказать.

Принимая во внимание выражения 5 и 6, а также правило обращения, получим искомую формулу:

$$f_{a_1,a_2,\ldots,a_m}(n)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot\prod_{i=1}^{m}C_{a_i+n-k-1}^{a_i}. \qquad (7)$$

Заключение

Подводя итог, по формуле (7) имеем:

1) $f(r,n)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot\prod_{i=1}^{m}C_{a_i+n-k-1}^{a_i}$, если r является $a_1, a_2,\ldots, a_m$ -эквивалентным;

2) $\psi(r)=\sum_{n=1}^{\infty}f(r,n)=\sum_{n=1}^{h}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot\prod_{i=1}^{m}C_{a_i+n-k-1}^{a_i}\right)$, где r является $a_1, a_2,\ldots, a_m$ -эквивалентным, а $h=\sum_{j=1}^{m}a_j$.

Полученный результат проиллюстрируем примерами разложений числа 100 в упорядоченные произведения целых сомножителей. В таблице 1 приведены множества разложений $\Omega_{100,n}$ и соответствующие им значения функции количества n -профилей числа 100.

Таблица 1
Table 1

Множества всех возможных n -профилей числа 100
и соответствующие им значения $f(100,n)$

The sets of all possible n -profiles number 100 and their corresponding values $f(100,n)$

n	$\Omega_{100,n}$	$f(100,n)$
1	{(100)}	1
2	{(2, 50), (50, 2), (4, 25), (25, 4), (5, 20), (20, 5), (10,10)}	7
3	{(2, 2, 25), (2, 25, 2), (25, 2, 2), (2, 5, 10), (2, 10 ,5), (5, 2, 10), (5, 10, 2), (10, 2, 5), (10, 5, 2), (4, 5, 5), (5, 4, 5), (5, 5, 4)}	12
4	{(2, 2, 5, 5), (2, 5, 2, 5), (2, 5, 5, 2), (5, 5, 2, 2,), (5, 2, 5, 2), (5, 2, 2, 5)}	6
5	$\varnothing$	0
6	$\varnothing$	0

Теперь проведем вычисления по формуле (7). Но для того, чтобы воспользоваться этой формулой, сначала требуется установить класс $a_1, a_2, \ldots, a_m$ -эквивалентности числа 100. Число $100 = 2^2 \cdot 5^2$ является 2,2-эквивалентным, и получение значений $f(100, n)$ сведется к вычислению $f_{2,2}(n)$:

$$f(100,1) = f_{2,2}(1) = C_1^0 C_2^2 C_2^2 = 1;$$
$$f(100,2) = f_{2,2}(2) = C_2^0 C_3^2 C_3^2 - C_2^1 C_2^2 C_2^2 = 9 - 2 = 7;$$
$$f(100,3) = f_{2,2}(3) = C_3^0 C_4^2 C_4^2 - C_3^1 C_3^2 C_3^2 + C_3^2 C_2^2 C_2^2 = 36 - 27 + 3 = 12;$$
$$f(100,4) = f_{2,2}(4) = C_4^0 C_5^2 C_5^2 - C_4^1 C_4^2 C_4^2 + C_4^2 C_3^2 C_3^2 - C_4^3 C_2^2 C_2^2 = 100 - 144 + 54 - 4 = 6;$$
$$f(100,5) = f_{2,2}(5) = C_5^0 C_6^2 C_6^2 - C_5^1 C_5^2 C_5^2 + C_5^2 C_4^2 C_4^2 - C_5^3 C_3^2 C_3^2 + C_5^4 C_2^2 C_2^2 =$$
$$= 225 - 500 + 360 - 90 + 5 = 0;$$
$$f(100,6) = f_{2,2}(6) = C_6^0 C_7^2 C_7^2 - C_6^1 C_6^2 C_6^2 + C_6^2 C_5^2 C_5^2 - C_6^3 C_4^2 C_4^2 + C_6^4 C_3^2 C_3^2 - C_6^5 C_2^2 C_2^2 =$$
$$= 441 - 1350 + 1500 - 720 + 135 - 6 = 0.$$

Получившиеся результаты вычислений полностью совпадают с данными из табл. 1. Используя данные табл. 1, легко найти значение $\psi(100) = \sum_{n=1}^{\infty} f(100, n) = 26$. Это же число получается и в результате вычислений:

$$\psi(100) = \sum_{n=1}^{4} f_{2,2}(n) = 1 + 7 + 12 + 6 = 26.$$

Список литературы

1. Бухштаб А.А. 2015. Теория чисел. Санкт-Петербург, изд. Лань 384 с.
2. Виленкин Н.Я. Виленкин П.А. Виленкин А.Н. 2019. Комбинаторика. Издательство М. МЦНМО. 400 стр.
3. Виноградов И.М. 2018. Основы теории чисел М., Издательство Юрайт, 102 с.
4. Гринблат Л.Ш. 2017 Алгебры множеств и комбинаторика ультрафильтров. Издательство М. МЦНМО. 144 с.
5. Зуланке Р. Онищик А.Л. 2020. Алгебра и геометрия. Издательство М МЦНМО. 512 стр.
6. Петровский А.Б. 2018. Теория измеримых множеств и мультимножеств. Издательство М. Наука 360 стр.
7. Румбешт В.В., Ядута А.З. 2014. Оценка количества последовательностей, порождаемых каскадным методом. Научные ведомости БелГУ. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика. 21 (192). 32/1:.109–117.
8. Румбешт В.В., Ядута А.З. 2015. Анализ применения конкретных групп в каскадном методе. Научные ведомости, серия: Экономика. Информатика. 7 (204). Выпуск 34/1.
9. Румбешт В.В. 2016. Анализ и синтез процедуры порождения кумулятивных последовательностей Научные ведомости серия Экономика. Информатика. №2 (223). 37: 71–80.
10. Скхипани Д., Елиа М. 2011 Аддитивные разложения индуцированные мультипликативных характеров над конечными полями. Издательство arXiv.org.
11. Gaultier Lambert Dmitry Ostrovsky Nick Simm. 2018. Subcritical Multiplicative Chaos for Regularized Counting Statistics from Random Matrix Theory Communications in Mathematical Physics. 360: 1–54.
12. Kálmán Cziszter Mátyás Domokos. 2016. The Interplay of Invariant Theory with Multiplicative Ideal Theory and with Arithmetic Combinatorics. Multiplicative Ideal Theory and Factorization Theory. pp 43–95.
13. Love Forsberg. 2016. Multisemigroups with multiplicities and complete ordered semi-rings. Beiträge zur Algebra und Geometrie. Contributions to Algebra and Geometry. 58: 405–426 (2017).

14. Thomas W. 2009. Cusick Pantelimon Stanica. "Cryptographic Boolean Functions and Applica-tions". Academic Press is an imprint of Elsevier 525 B Street, Suite 1900, San Diego, CA92101-4495, USA Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP, UK. First edition 2009.

15. Shuhei Mano. 2018. Measures on Partitions. Partitions, Hypergeometric Systems, and Dirichlet Processes in Statistics. pp 11–43.

16. Wenbo Sun. 2018. A structure theorem for multiplicative functions over the Gaussian integers and applications Journal d'Analyse Mathématique. 134: 55–105.

References

1. Buchstab A.A. 2015. number Theory. St. Petersburg, ed. DOE 384 PP. (in Russian).
2. Vilenkin N.Ya., Vilenkin P.A., Vilenkin A.N. 2019. Combinatorics. M mcnmo publishing house 400 pages. (in Russian).
3. Vinogradov I.M. 2018. Fundamentals of number theory, Moscow, yurayt publishing house, 102 p. (in Russian).
4. Greenblat L.S. 2017. Set Algebras and ultrafilter combinatorics. M publishing house mtsnmo, 144 p. (in Russian).
5. Zulanke R., Onishchik A.L. 2020. Algebra and geometry. M mcnmo publishing house 512 pages. (in Russian).
6. Petrovsky A.B. 2018. Theory of measurable sets and multisets. M Nauka publishing house 360 pages. (in Russian).
7. Rumbesht V.V., Yaduta A.Z. 2014. Evaluation of the number of sequences generated by the cascade method. Belgorod State University Scientific Bulletin: History Political science Economics Information technologies, 21 (192). 32/1: 109–117. (in Russian).
8. Rumbesht V.V., Yaduta A.Z. 2015. Analysis of the application specific groups in the cascade method Belgorod State University Scientific Bulletin: Economics Information technologies, 7 (204). 34/1: 105–115. (in Russian).
9. Rumbesht V.V. 2016. Analysis and synthesis procedures for the generation of cumulative sequences Belgorod State University Scientific Bulletin: Economics Information technologies, 2 (223). 37: (71–80). (in Russian).
10. Schipani D.M. 2011. Elia Additive decompositions induced by multiplicative characters over finite fields. Publishing house arXiv.org. (in Russian).
11. Gaultier Lambert Dmitry Ostrovsky Nick Simm. 2018. Subcritical Multiplicative Chaos for Regularized Counting Statistics from Random Matrix Theory Communications in Mathematical Physics. 360: 1–54.
12. Kálmán Cziszter Mátyás Domokos. 2016. The Interplay of Invariant Theory with Multiplicative Ideal Theory and with Arithmetic Combinatorics. Multiplicative Ideal Theory and Factorization Theory, pp 43–95.
13. Love Forsberg. 2016. Multisemigroups with multiplicities and complete ordered semi-rings. Beiträge zur Algebra und Geometrie. Contributions to Algebra and Geometry. 58: 405–426(2017).
14. Thomas W. Cusick Pantelimon Stanica. "Cryptographic Boolean Functions and Applica-tions". Academic Press is an imprint of Elsevier 525 B Street, Suite 1900, San Diego, CA92101-4495, USA Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP,UK. First edition 2009.
15. Shuhei Mano. 2018. Measures on Partitions. Partitions, Hypergeometric Systems, and Dirichlet Processes in Statistics, pp 11–43.
16. Wenbo Sun. 2018. A structure theorem for multiplicative functions over the Gaussian integers and applications Journal d'Analyse Mathématique. 134: 55–105.

Ссылка для цитирования статьи
For citation

Румбешт В.В., Бурданова Е.В. 2020. Комбинаторика упорядоченных мультипликативных разложений. Экономика. Информатика. 47 (1): 126–134. DOI 10.18413/2687-0932-2020-47-1-126-134

Rumbesht V.V., Burdanova E.V. 2020. Combinatorics an ordered multiplicative decompositions. Economics. Information technologies. 47 (1): 126–134 (in Russian). DOI 10.18413/2687-0932-2020-47-1-126-134