

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ COMPUTER SIMULATION HISTORY

УДК 681.511.42

DOI 10.52575/2712-746X-2023-50-4-848-858

О возникновении резонансной динамики в импульсной системе управления энергообеспечением нагревательной установки для производства монокристаллов сапфира

¹ Гольцов Ю.А., ² Абдирасулов А.З., ³ Яночкина О.О., ³ Коломиец Е.А., ¹ Кижук А.С.

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,

Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

² Ошский государственный университет,

Кыргызстан, 723500, г. Ош ул., Ленина, 331

³ Юго-западный государственный университет,

Россия, 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

E-mail: uagoltsov@gmail.com, aitibek.osh@gmail.com,

yanoolga@gmail.com, lenus07@gmail.com, askizhuka@gmail.com

Аннотация. Изучаются двухчастотные квазипериодические колебания в импульсной системе управления энергообеспечением нагревательной установки для выращивания кристаллов сапфира, поведение которой описывается неавтономными дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Такая модель сводится к двумерному негладкому непрерывному отображению. Через бифуркацию Неймарка-Сакера происходит переход от периодических колебаний к квазипериодическим. В фазовом пространстве отображения квазипериодическим колебаниям соответствует замкнутая инвариантная кривая. Выполнен анализ особенностей возникновения резонансной динамики. Области резонансной динамики в пространстве параметров образуют, так называемые языки Арнольда. В негладких системах языки Арнольда имеют специфическую структуру, отличную от структуры резонансных языков гладких систем. Известно, что притягивающая замкнутая инвариантная кривая существует внутри каждого резонансного языка. На этой кривой имеется четное число периодических орбит, половина из которых устойчивые, а половина – седловые, а сама инвариантная кривая образована неустойчивыми многообразиями седловых циклов. Показано, что на замкнутой инвариантной кривой возникают резонансы через гомоклиническую бифуркацию, когда число вращения Пуанкаре становится рациональным.

Ключевые слова: система управления энергообеспечением нагревательной установки, двухчастотные колебания, негладкое отображение, бифуркация Неймарка-Сакера, бифуркация граничного столкновения, двумерный тор, замкнутая инвариантная кривая

Благодарности: Работа Гольцова Ю.А. и Кижук А.С. выполнена в рамках реализации Федеральной программы поддержки университетов «Приоритет 2030» с использованием оборудования на базе Центра высоких технологий БГТУ им. В. Г. Шухова.

Абдирасулов А.З. поддержан грантом 14-22 Ошского государственного университета.

Яночкина О.О. и Коломиец Е.А. поддержаны Минобрнауки РФ, программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030», проекты № 1.71.23 П и № 1.7.21/S-2.

Исследование проводилось под руководством профессора Ж.Т. Жусубалиева, Международная научная лаборатория динамики негладких систем, Юго-Западный государственный университет, Россия.

Для цитирования: Гольцов Ю.А., Абдирасулов А.З., Яночкина О.О., Коломиец Е.А., Кижук А.С. 2023. О возникновении резонансной динамики в импульсной системе управления

On the Appearance of Resonant Dynamics in the Pulse Control System for the Energy Supply of a Heating Plant for Growing Sapphire Crystals

¹ Gol'tsov Yu. A., ² Abdirasulov A.Z., ³ Yanochkina O. O., ³ Kolomiets E. A., ¹ Kizhuk A. S.

¹ Belgorod State Technological University named after V.G. Shoukhov

46 Kostyukov St., Belgorod, 308012, Russia

² Osh State University

331 Lenin St, Osh, 723500, Kyrgyzstan

³ Southwest State University

94, 50 let Oktyabrya St., Kursk, 305040, Russia

E-mail: uagoltsov@gmail.com, aitibek.osh@gmail.com,

yanoolga@gmail.com, lenus07@gmail.com, askizhuka@gmail.com

Abstract. In this paper we study the nonlinear phenomena that can be observed in an energy supply pulse modulated control system of a heating unit. The behavior of such a system is described by nonautonomous differential equations with discontinuous right-hand sides. We reduce the investigation of this system to the studying of a two-dimensional non-smooth map. We demonstrate how a quasiperiodic dynamics can arise from a stable periodic motion through a Neimark-Sacker bifurcation. The paper also discusses the specific features of the transition from phase-locked dynamics to quasiperiodicity. The regions of phase-locked dynamics in the parameter space form the so-called Arnold tongues. For piecewise smooth systems, Arnold tongues have a specific sausage-like structure. Within each resonance tongue there is an attracting closed invariant curve. This closed curve includes two cycles, a saddle and a stable, and is formed by the saddle-node connection composed of the unstable manifolds of the saddle cycle. We show that transition from a quasiperiodic to the resonance dynamics may occur in a homoclinic bifurcation. Our numerical analysis shows that firstly a pair periodic orbits (stable) appears in a saddle-node bifurcation. Near the saddle-node bifurcation point we observe the coexistence of the stable cycle and the stable closed invariant curve with a quasiperiodic dynamics. The unstable manifolds of the saddle cycle separate the basins of attraction of the coexisting motions. As the parameters change the manifolds of the saddle cycle become tangent to each other, and this leads to the formation of a nontransversal homoclinic orbit. With the further change of parameters the stable and unstable manifolds of the saddle cycle intersect transversally to form the homoclinic structure. Finally, after the second homoclinic bifurcation a stable resonant closed curve appears, which is formed by the unstable manifolds of the saddle cycle.

Keywords: energy supply control system of a heating unit, two-frequency oscillations, non-smooth map, Neimark-Sacker bifurcation, border-collision bifurcation, two-dimensional torus, closed invariant curve

Acknowledgements: The work of Gol'tsov Yu.A. and Kizhuk A.S. were supported within the framework of the Program «Priority 2030» on the base of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov. The work was realized using equipment of High Technology Center at BSTU named after V.G. Shukhov.

Abdirasulov A.Z. was supported by the grant 14-22 of the Osh State University.

Yanochkina O.O. and Kolomiets E.A. were supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the scope of the Grant «Implementation of the Strategic Academic Leadership program Priority 2030», projects No 1.71.23 II and No 1.7.21/S-2.

The research was performed under the guidance of Prof Zh. T. Zhusubaliyev, International Scientific Laboratory for Dynamics of Non-Smooth Systems, Southwest State University, Russia.

For citation: Gol'tsov Yu.A., Abdirasulov A.Z., Yanochkina O.O., Kolomiets E.A., Kizhuk A.S. 2023. On the Appearance of the Resonant Dynamics in the Pulse Control System for the Energy Supply of a Heating Plant For Growing Sapphire Crystals. Economics. Information technologies, 50(4): 848-858 (in Russian). DOI: 10.52575/2712-746X-2023-50-4-848-858

Введение

Многие задачи физики, математики, биологии, экономики приводят к конечномерным динамическим системам, которые демонстрируют двухчастотные колебания. Двухчастотным колебаниям в фазовом пространстве динамической системы соответствует двумерный инвариантный тор, а замкнутая инвариантная кривая – в отображении [Guckenheimer, Holmes, 2002; Kuznetsov, 2004; Mira et al., 1996; Iooss, Joseph, 1989].

В зависимости от числа вращения Пуанкаре, движение на торе (или замкнутой кривой) может быть квазипериодическим, если оно иррационально и периодическим, если рационально. В первом случае предельным множеством является весь тор, а во втором случае – периодическая орбита [Guckenheimer, Holmes, 2002; Kuznetsov, 2004; Mira et al., 1996; Iooss, Joseph, 1989].

Как известно, в классическом случае, если не выполняются специфические условия, которые называются условиями сильных резонансов, замкнутая инвариантная кривая возникает через бифуркацию Неймарка-Сакера [Guckenheimer, Holmes, 2002; Kuznetsov, 2004; Mira et al., 1996; Iooss, Joseph, 1989].

Рассматриваемый класс систем управления описывается дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью, которые сводятся к негладким непрерывным или разрывным отображениям [Filippov, 1988; Zhusubaliyev, Mosekilde, 2003; Di Bernardo et al., 2008].

В работах [Zhusubaliyev et al., 2002; Zhusubaliyev et al., 2006] показано, что в негладких динамических системах, наряду с классическим, существует другой механизм возникновения замкнутой кривой из неподвижной точки, который связан с особыми бифуркациями, получившими название бифуркаций граничного столкновения («border collision») [Feigin, 1970; Nusse, Yorke 1992; Di Bernardo et al., 1999, Avrutin et al., 2019; Sushko et al., 2016; Zhusubaliyev et al., 2021; Zhusubaliyev et al., 2015; Zhusubaliyev et al., 2022; Banerjee et al., 2000; Zhusubaliyev, Mosekilde et al., 2003; Di Bernardo et al., 2008; Zhusubaliyev et al., 2001].

В случае, когда число вращения рациональное число, то говорят, что имеет место резонанс. Области резонансной динамики в пространстве параметров образуют так называемые языки Арнольда. В негладких системах структура языков Арнольда [см., например, Zhusubaliyev et al., 2002; Zhusubaliyev et al., 2006] отлична от резонансных областей гладких систем.

В данной работе исследуется переход от двухчастотных квазипериодических колебаний к резонансной динамике в импульсной системе управления энергообеспечением нагревательной установки для выращивания монокристаллов сапфира [Жусубалиев и др., 2017.]. Показано, что в области квазипериодической динамики сначала возникает пара периодических орбит через седло-узловую бифуркацию. Устойчивая периодическая орбита сосуществует с устойчивой замкнутой кривой с иррациональным числом вращения. Устойчивые многообразия седлового цикла определяют границы бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов. Затем, при вариации параметров квазипериодический режим становится периодическим, через гомоклиническую бифуркацию.

Постановка задачи

Постановка задачи.

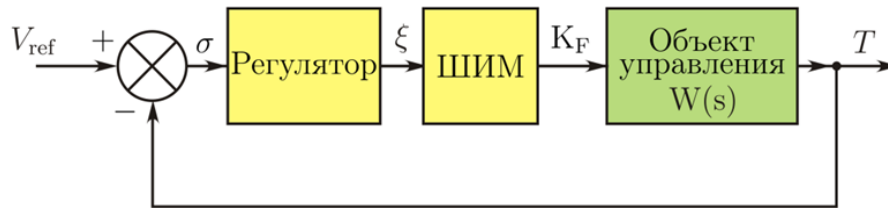


Рис. 1. Система управления энергообеспечением нагревательной установки.

Здесь V_{ref} – задающий сигнал; σ – сигнал ошибки; ШИМ – широтно-импульсный модулятор; ξ , K_F – входной и выходной сигналы ШИМ; T – температура печи в точке измерения; $W(s)$ – передаточная функция объекта управления

Fig. 1. Control system for the energy supply of a heating plant. Here V_{ref} is the reference signal; σ is the error signal; PWM is pulse width modulator; ξ , K_F are the input and output signals of PWM; T is the temperature of the furnace at the measuring point; $W(s)$ is the transfer function of the plant

Структурная схема системы управления энергообеспечением нагревательной установки для выращивания кристаллов сапфира изображена на рисунке 1, где передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W(s) = \frac{327,8}{10240s^2 + 352s + 1} = \frac{K}{T_1 \cdot T_2 \cdot s^2 + (T_1 + T_2) \cdot s + 1}.$$

Здесь T_1 , T_2 — постоянные времени нагревателя и внутреннего печного пространства, соответственно, K – коэффициент передачи объекта.

Состояние такой системы описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \times K_F(\xi), \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 \cdot T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K \cdot E_0}{T_1 \cdot T_2} \end{bmatrix},$$

$$K_F(\xi) = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\xi)],$$

$$\xi = \alpha(V_{ref} - \beta x_1(k \cdot a_0)) - V_0(t / a_0 - \lfloor t / a_0 \rfloor), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x_1 = T$; $x_2 = dT/dt$; T – температура печи в точке измерения; ξ , K_F – входной и выходной сигналы широтно-импульсного модулятора (ШИМ); V_{ref} – управляющий сигнал; E_0 – напряжение питания; a_0 – период модуляции; $\lfloor \cdot \rfloor$ – функция, выделяющая целую часть аргумента; β – коэффициент передачи датчика обратной связи, α – коэффициент усиления, V_0 – опорный сигнал модулятора.

Уравнение (1) можно записать в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1(x - K_F); \\ \dot{y} &= \lambda_2(y - K_F), \\ K_F &= \begin{cases} 1, & \xi \geq 0; \\ 0, & \xi < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \xi &= q + x(\lfloor \tau \rfloor) - \vartheta y(\lfloor \tau \rfloor) - \frac{P}{\alpha}(\tau - \lfloor \tau \rfloor), \\ \lfloor \tau \rfloor &= k, \quad k=0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= a_0 / t, \\ \lambda_1 &= -a_0 / T_1, \\ \lambda_2 &= -a_0 / T_2, \\ \vartheta &= \lambda_1 / \lambda_2, \\ q &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\beta \cdot K \cdot E_0 \cdot \lambda_2} V_{ref}, \\ P &= \frac{V_0}{V_{ref}} q, \\ T &= \frac{K \cdot E_0 \cdot \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (x - \vartheta y), \\ dT / dt &= \frac{K \cdot E_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{a_0 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)} (x - y). \end{aligned}$$

Параметры модели такие же, как и в [Жусубалиев и др., 2017].
 Уравнения (2) сводятся к негладкому непрерывному отображению:

$$\begin{aligned} F : (x, y) &\mapsto F(x, y), \\ F(x, y) &= \begin{cases} F_L(x, y), & \vartheta y - x < q - q / \alpha, \\ F_M(x, y), & q - q / \alpha \leq \vartheta y - x \leq q, \\ F_R(x, y), & \vartheta y - x > q. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_L(x, y) &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(x-1)} + 1 \\ e^{\lambda_2(y-1)} + 1 \end{pmatrix}; \\ F_R(x, y) &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 y} \end{pmatrix}; \\ F_M(x, y) &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(x-1)} + e^{\lambda_1(1-z)} \\ e^{\lambda_2(y-1)} + e^{\lambda_2(1-z)} \end{pmatrix}, \\ q + x - \vartheta y - qz / \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $F_L(x, y)$, $F_M(x, y)$ и $F_R(x, y)$ являются монотонными функциями. Области определения $F_L(x, y)$, $F_M(x, y)$ или $F_M(x, y)$ и $F_R(x, y)$ разделяются границей, которая называется «border» или многообразием переключения.

Бифуркационный анализ

На рисунке 2 изображена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, рассчитанная численно при $\Gamma = 7.8$ и $45.9 < \alpha < 49.8564$, где $\Gamma = E_0/E^*$ – нормированное входное напряжение ($E^* = 1В$). Бифуркационная диаграмма иллюстрирует возникновение пятиполосного квазипериодического режима через бифуркацию Неймарка-Сакера.

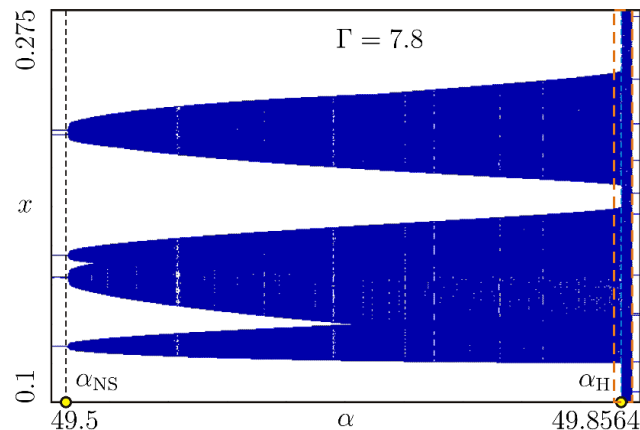


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для $\Gamma = 7.8$ и $45.9 < \alpha < 49.8564$
Fig. 2. Bifurcation diagram for $\Gamma = 7.8$ and $45.9 < \alpha < 49.8564$

На рисунке 3(а) представлен фазовый портрет отображения (3), из которого видно, что пятиполосному квазипериодическому режиму соответствует пятипериодная замкнутая кривая.

На рисунке 3(б) изображен увеличенный фрагмент фазового портрета, на котором представлена одна из пяти периодических замкнутых кривых. На этом рисунке показано, что границей бассейна притяжения устойчивой замкнутой кривой являются устойчивые многообразия седлового 5-цикла. Заметим, что квазипериодический аттрактор не является единственным: с ним сосуществуют и другие устойчивые периодические движения, например, периодов 9 и 11.

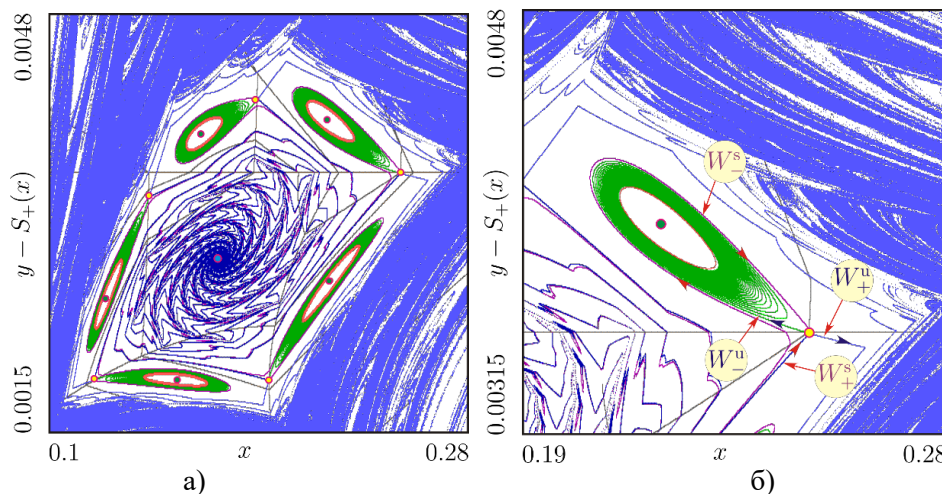


Рис. 3. (а) Фазовые портреты пяти-полосного квазипериодического аттрактора
(б) Увеличенный фрагмент фазового портрета (рис. 3(а))
Fig. 3. (a) Phase portrait for a five-band quasiperiodic attractor (b) Magnification of (fig. 3 (a))

На рис. 4 показана бифуркационная диаграмма для области, где существует устойчивый резонансный 125-цикл ($\Gamma = 7.8$, $49.8448467 < \alpha < 49.8449281$). В точке α_1 возникают устойчивый и седловой периодические орбиты периода 125 через седло-узловую бифуркацию (рис. 4).

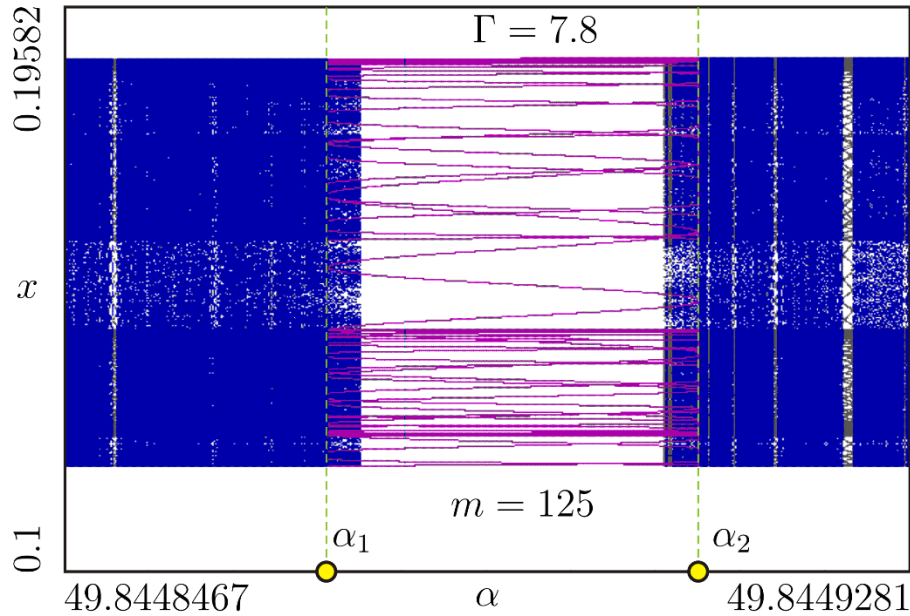


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для $49.8448467 < \alpha < 49.8449281$
 Fig. 4. Bifurcation diagram for $49.8448467 < \alpha < 49.8449281$

На рисунке 5(а) представлен фазовый портрет отображения (3) при $\alpha = 49.8448728$, из которого видно, что устойчивый цикл периода 125 сосуществует с устойчивой замкнутой кривой. Устойчивое многообразие W^s_{\pm} седлового 125-цикла определяет границы бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов.

Фазовые портреты на рисунке 5(б-г), рассчитанные при $\alpha = 49.844875299$, $\alpha = 49.8448753$, $\alpha = 49.8448753084$, показывают механизмы перехода от замкнутой инвариантной кривой с квазипериодической динамикой к резонансному 125-циклу через гомоклиническую бифуркацию.

На рисунке 5(б) ($\alpha = 49.844875299$) приведен фазовый портрет, отвечающий первому гомоклиническому касанию неустойчивого W^u_{\pm} и устойчивого W^s_{\pm} многообразий. На рисунке 5(в) ($\alpha = 49.8448753$) показана гомоклиническая структура, отвечающая трансверсальному пересечению неустойчивого W^u_{\pm} и устойчивого W^s_{\pm} многообразий седловой периодической орбиты. На рисунке 5(г) изображен фазовый портрет при $\alpha = 49.8448753084$, иллюстрирующий вторую гомоклиническую бифуркацию, а на рисунке 5(д) ($\alpha = 49.844877$) представлена устойчивая резонансная кривая после гомоклинических бифуркаций. На рисунке 5(г) показано, что неустойчивыми многообразиями W^u_{\pm} седлового цикла периода 125 образована замкнутая инвариантная кривая.

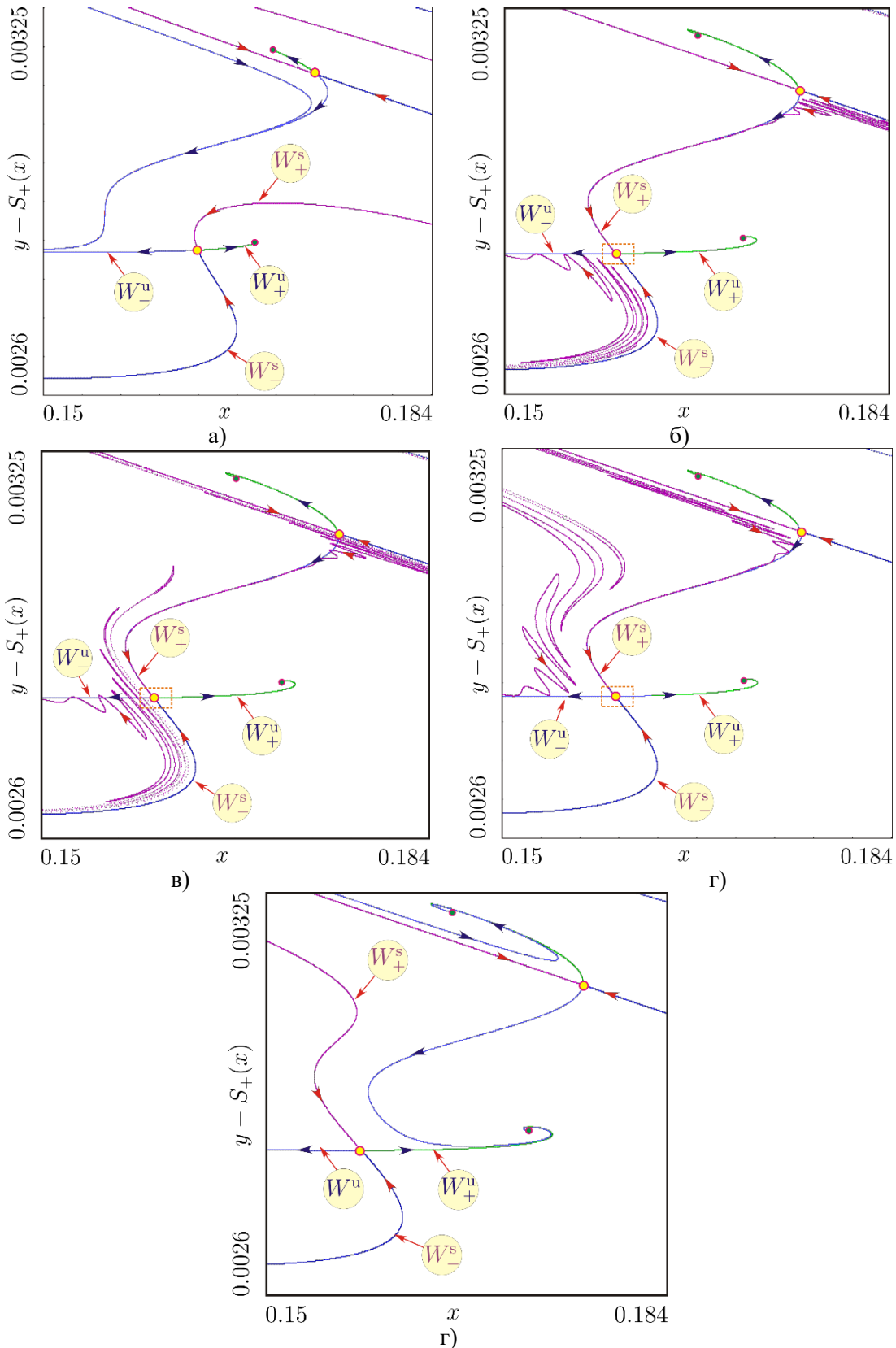


Рис. 5. (а) Фазовый портрет после седло-узловой бифуркации;
 (б) Первое гомоклиническое касание; (в) Гомоклиническая структура;
 (г) Второе гомоклиническое касание; (д) Резонансная замкнутая инвариантная кривая
 Fig. 5. (a) Phase portrait after the saddle-node bifurcation; (b) First homoclinic tangency;
 (c) Homoclinic structure; (d) Second homoclinic tangency; (e) Resonant closed invariant curve

Заклучение

В представленной работе изучен переход от двухчастотных квазипериодических колебаний к резонансной динамике импульсной системы управления энергообеспечением нагревательной установки для выращивания кристаллов сапфира. Показано, что в области существования устойчивой замкнутой кривой, отвечающей двухчастотным колебаниям, сначала, через седло-узловую бифуркацию, возникает пара периодических орбит – устойчивая и седловая. Устойчивая периодическая орбита сосуществует с устойчивой замкнутой кривой с иррациональным числом вращения. Границей бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов является устойчивые многообразия седлового цикла. Затем, при вариации параметров, устойчивый квазипериодический режим переходит в устойчивый резонансный цикл через гомоклиническую бифуркацию.

Список литературы

- Жусубалиев Ж.Т., Рубанов В.Г., Гольцов Ю.А., Яночкина О.О., Поляков С.А. 2017. Квазипериодичность в системе управления температурным полем нагревательной установки. Научные ведомости БелГУ. Серия Экономика. Информатика. Вып. 44, 23(272): 113–122.
- Avrutin V., Gardini L., Sushko I. and Tramontana F. 2019. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 648.
- Banerjee S., Karthik M. S., Yuan G. and Yorke J. A. 2000. Bifurcations in one-dimensional piecewise-smooth maps — Theory and applications in switching circuits. IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl. 47(3): 389–394. DOI: 10.1109/81.841921.
- Banerjee S., Ranjan P. and Grebogi C. 2000. Bifurcations in two-dimensional piecewise-smooth maps: Theory and applications in switching circuits. IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., 47(5): 633–643. DOI: 10.1109/81.847870
- Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R. and Kowalczyk P. 2008. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. New York: Springer, 504.
- Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. 1999. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. Chaos Solitons & Fractals. 10: 1881–1908.
- Feigin M.I. 1970. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise-continuous systems, PMM, 34(5): 861–869. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
- Filippov A.F. 1988. Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 314.
- Guckenheimer J., Holmes Ph. 2002. Nonlinear Oscillations. Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer New York, 478.
- Iooss G., Joseph D.D. 1989. Elementary Stability and Bifurcation Theory. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 347.
- Kuznetsov Yu. 2004. Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer New York, 654.
- Mira C., Gardini L., Barugola A. and Cathala J.-C. 1996. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. World Scientific, Singapore, 632.
- Nusse H.E., Yorke J.A. 1992. Border-collision bifurcations Including “Period two to period three” for piecewise smooth systems. Physica D. 57(1-2): 39–57. DOI:10.1016/0167-2789(92)90087-4
- Sushko I., Gardini L. and Avrutin V. 2016. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions. J. Diff. Eq. and Applicat. 22(12): 1816–1870. DOI:10.1080/10236198.2016.1248426
- Zhusubaliyev Zh.T. and Mosekilde E. 2003. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. New Jersey, London, Singapore, Hong-Kong: World Scientific, 376.
- Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin A. and Bastian F. 2021. Transformations of closed invariant curves and closed-invariant-curve-like chaotic attractors in piecewise smooth systems. Internat. J. Bifurcat. Chaos. 31(3): 2130009-1–213009-24. DOI:10.1142/S0218127421300093
- Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Sushko I. and Gardini L. 2022. Border collision bifurcation of a resonant closed invariant curve. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 32(4): 043101-1–043101-10. DOI:10.1063/5.0086419

- Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. 2015. Multistability and hidden attractors in a multilevel DC/DC converter. *Mathematics and Computers in Simulation*. 109: 32-45. DOI: 10.1016/j.matcom.2014.08.001
- Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Maity S.M., Mohanan S., Banerjee S. 2006. Border collision route to quasiperiodicity: numerical investigation and experimental confirmation. *Chaos*. 16: 023122–1 – 023122–11. DOI: 10.1063/1.2208565
- Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterina E.A., Mosekilde E. 2001. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 11(12): 2977–3001. DOI:10.1142/S0218127401003991
- Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterina E.A., Mosekilde E. 2002. Border-collision bifurcations on a two-dimensional torus. *Chaos, Solitons & Fractals*. 13(9): 1889–1915. DOI:10.1016/S0960-0779(01)00205-3

References

- Zhusubaliyev Zh.T., Rubanov V.G., Gol'tsov Yu.A., Yanochkina O.O., Polyakov S.A. 2017. Quasiperiodicity in a temperature field control system of a heating unit. *Scientific statements of BelSU. Ser. Economy. Informatics. Issue 44, 23(272): 113 - 122 (in Russian)*.
- Avrutin V., Gardini L., Sushko I. and Tramontana F. 2019. *Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures*. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 648.
- Banerjee S., Karthik M. S., Yuan G. and Yorke J. A. 2000. Bifurcations in one-dimensional piecewise-smooth maps – Theory and applications in switching circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.* 47(3): 389–394. DOI: 10.1109/81.841921.
- Banerjee S., Ranjan P. and Grebogi C. 2000. Bifurcations in two-dimensional piecewise-smooth maps: Theory and applications in switching circuits. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*, 47(5): 633-643. DOI: 10.1109/81.847870
- Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R. and Kowalczyk P. 2008. *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. New York: Springer, 504.
- Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. 1999. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems. *Chaos Solitons & Fractals*. 10: 1881–1908.
- Feigin M.I. 1970. Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise-continuous systems, *PMM*, 34(5): 861-869. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90064-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90064-X)
- Filippov A.F. 1988. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 314.
- Guckenheimer J., Holmes Ph. 2002. *Nonlinear Oscillations. Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer New York, 478.
- Iooss G., Joseph D.D. 1989. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 347.
- Kuznetsov Yu. 2004. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer New York, 654.
- Mira C., Gardini L., Barugola A. and Cathala J.-C. 1996. *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*. World Scientific, Singapore, 632.
- Nusse H.E., Yorke J.A. 1992. Border-collision bifurcations Including “Period two to period three” for piecewise smooth systems. *Physica D*. 57(1-2): 39–57. DOI:10.1016/0167-2789(92)90087-4
- Sushko I., Gardini L. and Avrutin V. 2016. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions. *J. Diff. Eq. and Applicat.* 22(12): 1816–1870. DOI:10.1080/10236198.2016.1248426
- Zhusubaliyev Zh.T. and Mosekilde E. 2003. *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*. New Jersey, London, Singapore, Hong-Kong: World Scientific, 376.
- Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin A. and Bastian F. 2021. Transformations of closed invariant curves and closed- invariant-curve-like chaotic attractors in piecewise smooth systems. *Internat. J. Bifurcat. Chaos*. 31(3): 2130009-1–213009-24. DOI:10.1142/S0218127421300093
- Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Sushko I. and Gardini L. 2022. Border collision bifurcation of a resonant closed invariant curve. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 32(4): 043101-1–043101-10. DOI:10.1063/5.0086419
- Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. 2015. Multistability and hidden attractors in a multilevel DC/DC converter. *Mathematics and Computers in Simulation*. 109: 32-45. DOI: 10.1016/j.matcom.2014.08.001

- Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E., Maity S.M., Mohanan S., Banerjee S. 2006. Border collision route to quasiperiodicity: numerical investigation and experimental confirmation. *Chaos*. 16: 023122–1 – 023122–11. DOI: 10.1063/1.2208565
- Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterlin E.A., Mosekilde E. 2001. Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system. *Int. J. Bifurc. Chaos*. 11(12): 2977–3001. DOI:10.1142/S0218127401003991
- Zhusubaliyev Zh.T., Soukhoterlin E.A., Mosekilde E. 2002. Border-collision bifurcations on a two-dimensional torus. *Chaos, Solitons & Fractals*. 13(9): 1889-1915. DOI:10.1016/S0960-0779(01)00205-3

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 14.04.2023

Поступила после рецензирования 03.10.2023

Принята к публикации 01.12.2023

Received April 14, 2023

Revised October 03, 2023

Accepted December 01, 2023

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Гольцов Юрий Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры Техническая кибернетика, Белгородский государственный университет им. В.Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Абдирасулов Айтибек Закирович, директор IT академии при ОшГУ, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан

Яночкина Ольга Олеговна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной техники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Коломиец Елена Александровна, кандидат технических наук, преподаватель кафедры вычислительной техники, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Кижук Александр Степанович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры Техническая кибернетика, Белгородский государственный университет им. В.Г. Шухова, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuriy A. Gol'tsov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Engineering Cybernetics, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Belgorod, Russia

Aitibek Z. Abdirasulov, Director of the IT Academy at Osh State University, Osh, Kyrgyzstan

Olga O. Yanochkina, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Engineering, Southwest State University, Kursk, Russia

Elena A. Kolomiets, Candidate of Technical Sciences, Lecturer of the Department of Computer Engineering, Southwest State University, Kursk, Russia

Aleksandr S. Kizhuk, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Engineering Cybernetics, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov, Belgorod, Russia