

ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ INFOCOMMUNICATION TECHNOLOGIES

УДК 519.6

DOI 10.52575/2687-0932-2023-50-3-712-730

Модифицированный метод Прони с корректирующим сигналом управления

Волчков В.П., Потапова Е.А.

Московский технический университет связи и информатики,
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а
E-mail: volchkovvalery@mail.ru, potapova-69@bk.ru

Аннотация. Разработан модифицированный метод Прони, который значительно расширяет его аппроксимирующие возможности, позволяя качественно описывать сложные некаузальные дискретные сигналы на бесконечном двухстороннем интервале времени. Классический метод Прони и его известные модификации предназначены для аппроксимации только каузальных сигналов, причем они не лучшим образом описывают дискретные сигналы, которые являются решениями разностных уравнений с кратными или очень близкими по величине полюсами. С целью преодоления указанных выше недостатков для аппроксимации дискретных некаузальных сигналов предложена новая дискретная двухкомпонентная экспоненциальная модель Прони со специальным корректирующим сигналом управления. Разработан метод оптимального оценивания параметров предложенной модели и на его основе получены строгие аналитические выражения для аппроксимирующего сигнала и его спектра. Приведены результаты сравнительного эксперимента подтверждающие более хорошее качество аппроксимации сигнала предложенного модифицированного метода Прони по сравнению с известным.

Ключевые слова: аппроксимация сигнала, метод Прони, рекурсивная модель, разностные уравнения, дискретные сигналы, каузальные сигналы, некаузальные сигналы

Для цитирования: Волчков В.П., Потапова Е.А. 2023. Модифицированный метод Прони с корректирующим сигналом управления. Экономика. Информатика. 50(3): 712–730. DOI: 10.52575/2687-0932-2023-50-3-712-730

Modified Prony Method with a Correctional Control Signal

Valery P. Volchkov, Ekaterina A. Potapova

Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8a Aviamotornaya St., Moscow, 111024, Russian Federation
E-mail: volchkovvalery@mail.ru, potapova-69@bk.ru

Abstract. To approximate discrete non-causal signals given on an infinite two-sided time interval, a two-component modification of the Prony model is proposed, in which one component approximates the causal part of the signal, and the other, the anti-causal part. To reduce the approximation errors arising from the restrictions on the multiplicity of the poles, a special corrective signal is added to each component of the exponential Prony model, which plays the role of the optimal control and leads to its amplitude-phase correction. A method for optimal estimation of the parameters of the proposed two-component Prony model is developed and, on its basis, analytical expressions are obtained for the algorithm of the best approximation of signals by its finite sample of samples according to the minimum squared error (MSE) criterion. Strict analytical expressions are obtained for the spectrum of the approximating signal, built on the basis of the proposed Prony method with a corrective control signal. The results of a comparative

experiment are presented, confirming the good quality of the signal approximation in both the time and spectral domains under the conditions of the multiplicity of the poles. It is shown that in this case the proposed method makes it possible to reduce the approximation errors by more than 80 times compared to the conventional Prony method.

Keywords: signal approximation, Prony method, recursive model, difference equations, discrete signals, causal signals, non-causal signals

For citation: Volchkov V.P., Potapova E.A. 2023. Modified Proni Method with a Correctional Control Signal. Economics. Information technologies, 50(3): 712–730 (in Russian). DOI: 10.52575/2687-0932-2023-50-3-712-730

Описание проблемы и ее актуальность

При проектировании эффективных систем передачи и приема информации по каналу связи часто возникает следующая проблема: по выбранному критерию качества синтезирован оптимальный дискретный сигнал, обеспечивающий наилучший способ передачи и приема, но его аналитическое описание оказалось очень сложным и трудно реализуемым на практике. Поэтому для того, чтобы использовать результаты синтеза на практике, нужно построить такую дискретную модель формирования сигналов, которая бы качественно аппроксимировала исходный оптимальный сигнал, имела простое описание и создавала предпосылки для последующей эффективной реализации в виде формирующего фильтра.

Метод Прони и его многочисленные модификации, описанные в работах [Марпл-мл, 1990; Hu, Yang, Li; 2013; Plonka, Tasche, 2014; Skrzipek, 2017; Khodaparast, Fosso, Molinas, 2018; Keller, Plonka, 2021; Skrzipek, 2021, Ahn, Koh, 2022; Hussen, He, 2022; Janith et al., 2022; Lin et al., 2022], нацелены на решение указанной проблемы. Однако во всех этих модификациях присутствуют определенные ограничения на структуру и параметры модели Прони (модель должна быть каузальной, а все ее полюса должны быть простыми). Эти ограничения не всегда позволяют обеспечить требуемое качество аппроксимации и ограничивают область применения.

Поэтому поиск новых подходов к развитию метода Прони и преодолению его недостатков оказывается актуальной задачей. Для этого авторами статьи предложена новая двухкомпонентная модель Прони с амплитудно-фазовой коррекцией, позволяющая расширить ее аппроксимирующие возможности и существенно улучшить качество аппроксимации сигналов. Разработан метод оптимального оценивания параметров предложенной модели и на его основе получены аналитические выражения, описывающие алгоритм наилучшей аппроксимации некаузального сигнала по его конечной выборке с использованием критерия минимума квадратической ошибки (МКО). Получены строгие аналитические выражения для спектра аппроксимирующего сигнала. Приведены результаты сравнительного эксперимента, подтверждающие в условиях кратности полюсов хорошее качество аппроксимации сигнала как во временной, так и в спектральной областях. Показано, что в этом случае предложенный метод позволяет уменьшить ошибки аппроксимации более чем в 80 раз по сравнению с обычным методом Прони.

Анализ проблемы и пути ее решения

Чтобы сформулировать и обосновать предложенный авторами подход рассмотрим основные особенности метода Прони, проанализируем его достоинства, которые необходимо сохранить, и слабые стороны, которые следует преодолеть.

Суть подхода Прони заключается в аппроксимации сигнала линейной комбинацией комплексных дискретных экспоненциальных функций, а его современные версии основаны на подгонке параметров экспоненциальной модели к известным значениям сигнала методом наименьших квадратов по критерию МКО. Причем количество отсчетов сигнала всегда превышает число параметров экспонент, а разные модификации метода Прони в основном сводятся к адаптации его к решению конкретных физических приложений.

В частности, построенная на основе модели Прони дискретная аппроксимация сигнала, может быть адекватно преобразована в рекурсивную модель путем пересчета параметров экспоненциальной модели в параметры соответствующей рекурсивной модели (в системе МАТЛАБ для этого используется функция `residuez`). В результате моделирование сигнала заметно упрощается и может быть реализовано в виде рекурсивного формирующего фильтра.

Для более детального анализа достоинств и недостатков метода Прони его необходимо разбить на три этапа.

1) На первом этапе строится модель линейного рекуррентного предсказания сигнала и оцениваются ее параметры по критерию минимума квадрата ошибки (МКО) предсказания.

2) На втором этапе из коэффициентов линейного предсказания формируется характеристический полином, находятся его корни и выполняется процедура полиномиальной факторизации в предположении, что все найденные корни являются простыми. Эти корни являются показателями экспонент модели Прони и совпадают полюсами системной функции соответствующего формирующего фильтра.

3) На третьем этапе по критерию МКО решается система линейных уравнений относительно коэффициентов линейной комбинации экспонент, входящих в модель Прони.

Главное достоинство метода Прони – возможность корректного разделения процедур оценивания показателей экспонент и коэффициентов при экспонентах и сведение их к решению двух переопределенных систем линейных уравнений методом наименьших квадратов. Другие известные методы [Levy, 1959; Rabiner, Gold, 1975; Марпл-мл, 1990; Оппенгейм, Шафер, 2006; Смит, 2012], основанные на аппроксимации сигнала в частотной области, этим достоинством не обладают, а для оптимальной оценки параметров модели по критерию МКО приходится решать нелинейную задачу, привлекая численные итерационные методы. Кроме того, алгоритм Прони оказывается привлекательным благодаря наличию эффективных вычислительных алгоритмов полиномиальной факторизации и простой структуре матрицы Вандермонда, описывающей систему линейных уравнений на этапе 3).

Главный недостаток метода Прони – корни характеристического полинома должны быть простыми. Если это не так, то алгоритм полиномиальной факторизации дает приближенное решение для полюсов, а значит и для показателей экспонент. Чтобы компенсировать возникающие при этом ошибки аппроксимации можно повысить порядок аппроксимации, увеличив число аппроксимирующих экспонент. Но это увеличит число полюсов формирующего фильтра, а также чувствительность алгоритма к вычислительным ошибкам или возможному зашумлению отсчетов сигнала, если сигнал был принят по каналу связи.

Другой недостаток связан каузальностью экспоненциальной модели Прони. Это значит, что аппроксимируемый сигнал тоже должен быть каузальным, т.е. задаваться на одностороннем положительном интервале времени. Причина такого ограничения связана с желанием получить в процессе синтеза физически реализуемый формирующий фильтр. Однако это требование ограничивает класс возможных решений и часто в ущерб качеству аппроксимации. Кроме того, существуют задачи, когда исходные сигналы задаются на бесконечном двухстороннем интервале и являются несимметричными [Volchkov, Sannikov,

Manopina, 2019; Волчков, Антипова, 2022]. Существующие модификации метода Прони не приспособлены к аппроксимации таких некаузальных сигналов. Поэтому желательно иметь более расширенную модель Прони, пригодную для аппроксимации сигнала на двухстороннем бесконечном интервале. А необходимое свойство каузальности обеспечить потом на этапе физической реализации формирующего фильтра, вводя в него подходящую задержку и ограничения по времени.

Статья посвящена дальнейшему развитию метода Прони и преодолению указанных выше недостатков. Ниже описаны пути решения проблемы и преимущества нового подхода.

Для снятия ограничений, связанных каузальностью, предлагается двухкомпонентная модификация модели Прони, у которой одна компонента отвечает за аппроксимацию каузальной части сигнала в прямом времени на интервале $[0, \infty]$, а другая – за аппроксимацию антикаузальной части сигнала в обратном времени на интервале $[0, -\infty]$. Причем параметры этих двух модельных компонент оцениваются независимо, а результаты аппроксимации сигнала в прямом и обратном времени затем объединяются.

Для уменьшения ошибок аппроксимации, возникающих из-за ограничений на кратность корней характеристического полинома, в каждую из двух модельных компонент к экспоненциальной части модели добавляется специальный корректирующий сигнал управления (КСУ), действие которого распространяется только на ограниченное число отсчетов. При этом оптимальные параметры корректирующего сигнала оцениваются вместе с коэффициентами экспонент по критерию наименьших квадратов на 3-ем этапе iii) построения модели Прони. В соответствующем рекурсивном формирующем фильтре добавление такого корректирующего сигнала приводит к дополнительному оптимальному управлению начальными условиями разностного уравнения, приводя к амплитудно-фазовой коррекции его комплексной частотной характеристики.

Предлагаемая двухкомпонентная модификация метода Прони с КСУ позволяет получить строгие аналитические выражения для комплексного спектра аппроксимирующего сигнала, которые по сложности мало чем отличаются от выражений для спектра классической модели Прони. Это также является достоинством предложенной модели, так как позволяет использовать ее для спектрального анализа некаузальных сигналов.

В экспериментальной части статьи показано, что введение КСУ в модель Прони, позволяет значительно уменьшить ошибки аппроксимации некаузального сигнала как во временной, так и частотной области. А двухкомпонентная структура модели позволяет одинаково хорошо аппроксимировать некаузальный сигнал как на положительном, так и на отрицательном интервалах времени.

Математическая формализация задачи и ее решение

Рассмотрим дискретный вещественный некаузальный детерминированный сигнал $\{s[i]\}$

$$s[i] \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad E_s = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s^2[i] < \infty \quad (1)$$

с конечной энергией E_s на бесконечном двухстороннем интервале времени $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Разобьем его на две подпоследовательности: каузальную часть $\{s[i^+]\}$ (при $i \geq 0$) и антикаузальную часть $\{s[i^-]\}$ (при $i \leq 0$)

$$\{s[i]\} = \{s[i^-]\} \cup \{s[i^+]\} \oslash [0], \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

$$\{s[i^+]\} = \{s[i^+], \quad i^+ = 0, +1, +2, \dots\}, \quad (3)$$

$$\{s[i^-]\} = \{s[i^-] \in \mathbb{R}, \quad i^- = 0, -1, -2, \dots\}, \quad (4)$$

где значение $s[0]$ из соображений симметрии входит в каждую из этих частей; \cup, \ominus – символы объединения и вычитания множеств, соответственно. Для аппроксимации сигнала $\{s[i]\}$ на интервалах $\mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbf{Z}^- = \{0, -1, -2, \dots\}$ используем двухкомпонентную модифицированную модель Прони следующего вида

$$\{y[i]\} = \{y[i^-]\} \cup \{y[i^+]\} \ominus y[0], \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5)$$

$$y[i^+] = \sum_{k=1}^{K^+} c_k^+ (r_k^+)^{i^+} + u[i^+], \quad i^+ = 0, +1, +2, \dots, \quad (6)$$

$$y[i^-] = \sum_{k=1}^{K^-} c_k^- (r_k^-)^{i^-} + u[i^-], \quad i^- = 0, -1, -2, \dots, \quad (7)$$

где $c_k^+, r_k^+ \in \mathbb{C}$ – комплексные параметры дискретных экспонент каузальной части (6) модели Прони; $c_k^-, r_k^- \in \mathbb{C}$ – аналогичные параметры антикаузальной части (7);

$$u[i^+] = \sum_{m=0}^{M^+} b_m^+ \delta[i^+ - m], \quad u[i^-] = \sum_{m=0}^{M^-} b_m^- \delta[i^- + m] \quad (8)$$

– корректирующие сигналы управления для (6) и (7) с вещественными параметрами $b_m^+, b_m^- \in \mathbb{R}$;

$$\delta[i] = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

– единичный импульс Кронекера.

Особенность модифицированных экспоненциальных моделей Прони (6), (7) в наличии специальной правой части, включающей дискретные сигналы управления (8). Они состоят из задержанных единичных импульсов, число которых $M^+, M^- \geq 0$ определяет длительность сигнала управления, а параметры b_m^+, b_m^- – ее интенсивность. Следовательно, структура сигналов (8) такова, что при $i^+ > M^+$ и $i^- > M^-$ управления обнуляются.

Введение дополнительного корректирующего сигнала управления позволяет улучшить качество аппроксимации по сравнению с традиционной экспоненциальной моделью Прони. Как частный случай при $u[i^+] = u[i^-] = 0$ получаем двухкомпонентную экспоненциальную модель Прони на двухстороннем интервале без сигнала управления.

Отметим, что каузальная модель (6) формирует значения процесса $\{y[i^+]\}$ в прямом времени, который используется для аппроксимации сигнала (3). Антикаузальная модель (7) формирует значения процесса $\{y[i^-]\}$ в обратном времени для аппроксимации сигнала (4). Начальную точку отсчета $i = 0$ мы для симметрии включаем в алгоритм формирования каждой из этих моделей. Формулы (2), (5) описывают процедуру корректной «склейки» каузальной и антикаузальной частей сигнала и его аппроксимации. Количество слагаемых K^+, K^- и M^+, M^- в соответствующих суммах в правой части уравнений (6), (7) могут различаться, а числа K^+, K^- определяют порядок экспоненциальной аппроксимации.

Если сигнал (2) четный, то аналогичным свойством $y[i] = y[-i]$ обладает его аппроксимация (5). Поэтому полагаем $c_k^- = c_k^+$, $b_m^- = b_m^+$, $K^+ = K^-$, $M^+ = M^-$ и описание сигнала $\{y[i]\}$ упрощается. Похожее упрощение $c_k^- = -c_k^+$, $b_m^- = -b_m^+$ получаем в случае нечетного сигнала.

Если же исходный некаузальный сигнал $\{s[i]\}$ не обладает симметрией, то для его аппроксимации используется двухкомпонентная модель Прони (5)-(7) общего вида с разными наборами параметров.

Задача наилучшей аппроксимации сигнала $s[i], i \in \mathbf{Z}$ дискретным процессом $\{y[i]\}$ сводится к такому выбору его параметров $\{c_k^\pm\}, \{r_k^\pm\}, \{b_m^\pm\}$, при котором ошибка аппроксимации будет минимальной.

Покажем, что неизвестные параметры $\{r_k^\pm\}$ моделей (6), (7) можно оценить отдельно без знания остальных параметров $\{c_k^\pm\}, \{b_m^\pm\}$. Для классической модели Прони справедливость такого разделения доказана [Марпл-мл, 1990], но из-за наличия в правой части выражений (6), (7) корректирующих сигналов (8) требуется дополнительное рассмотрение.

Докажем сначала принцип разделения и получим оценку параметров $\{r_k^+\}$ для каузальной модели (6).

Запишем выражение (6) для сдвинутого момента времени $i^+ - l$ в предположении, что $l \in \{0, \dots, K^+\}$, а временной индекс i^+ удовлетворяет неравенству $i^+ > K^+ + M^+$

$$y[i^+ - l] = \sum_{k=1}^{K^+} c_k^+ (r_k^+)^{i^+ - l} + u[i^+ - l]. \quad (11)$$

В этом случае $i^+ - l > M^+$, поэтому согласно (8) и свойствам единичного импульса (9) справедливо

$$u[i^+ - l] = \sum_{m=0}^{M^+} b_m^+ \delta[i^+ - l - m] = 0, \quad i^+ > K^+ + M^+,$$

а равенство (11) принимает вид

$$y[i^+ - l] = \sum_{k=1}^{K^+} c_k^+ (r_k^+)^{i^+ - l}, \quad \forall i^+ > K^+ + M^+, \quad l \in \{0, \dots, K^+\}. \quad (12)$$

Пусть $a^+[l] \in \mathbf{R}, l = 0, \dots, K^+$ вещественные коэффициенты, причем $a^+[0] = 1$. Умножим их последовательно на обе части равенства (12), а затем суммируем полученные равенства и преобразуем правую часть выражения

$$\sum_{l=0}^{K^+} a^+[l] y[i^+ - l] = \sum_{l=0}^{K^+} a^+[l] \sum_{k=1}^{K^+} c_k^+ (r_k^+)^{i^+ - l} = \sum_{k=1}^{K^+} c_k^+ (r_k^+)^{i^+ - K^+} \left(\sum_{l=0}^{K^+} a^+[l] (r_k^+)^{K^+ - l} \right),$$

где $i^+ > K^+ + M^+$. Очевидно, выражение стоящее в круглых скобках равно 0, если параметры $r_k^+, k = 1, \dots, K^+$ являются простыми корнями характеристического полинома

$$\Phi^+(z; \mathbf{a}) = \sum_{l=0}^{K^+} a^+[l] (z)^{K^+ - l} \quad (13)$$

K^+ -го порядка, ассоциированного с линейным разностным уравнением предсказания вперед

$$y[i^+] = a^+[1]y[i^+ - 1] + \dots + a^+[K^+]y[i^+ - K^+]. \quad (14)$$

Следовательно, при $i^+ > K^+ + M^+$ и $\Phi^+(r_k^+; \mathbf{a}^+) = 0, \forall k$ уравнение (14) описывает экспоненциальную модель Прони $y[i^+] = \sum_{k=1}^{K^+} c_k^+ (r_k^+)^{i^+}$, которая уже не содержит в явном виде сигнал управления. Поэтому если каузальный сигнал $\{s[i^+]\}$ при $i^+ > K^+ + M^+$ описывается линейной комбинацией из K^+ комплексных экспонент, то найдутся коэффициенты $\{a^+[l]\}$, при которых ошибки линейного предсказания

$$e[i^+] = s[i^+] - \sum_{l=1}^{K^+} a^+[l] s[i^+ - l], \quad i^+ > K^+ + M^+ \quad (15)$$

будут равны $e[i^+] = 0$. Для всех других сигналов мы имеем $e[i^+] \neq 0$, а ошибки (15) могут служить показателем качества аппроксимации в текущие моменты времени.

Пусть известна выборка \mathbf{s}^+ из $N^+ > 2K^+ + M^+$ отсчетов каузального сигнала $\{s[i^+]\}$ (3)

$$\mathbf{s}^+ = (s[0], s[1], \dots, s[N^+ - 1])^T, \quad N^+ > 2K^+ + M^+, \quad (16)$$

и будем оценивать качество его аппроксимации на временном интервале $K^+ + M^+ < i^+ \leq N^+ - 1$ суммой квадратов ошибок линейного предсказания (15)

$$E(\mathbf{a}^+) = \sum_{i^+=K^++M^++1}^{N^+-1} e^2[i^+],$$

которая зависит от вектора коэффициентов

$$\mathbf{a}^+ = (a^+[1], \dots, a^+[K^+])^T$$

характеристического полинома (13). Оптимальную оценку \mathbf{a}_o^+ для вектора \mathbf{a}^+ будем искать по критерию минимума квадратической ошибки (МКО)

$$\mathbf{a}_o^+ = \arg \min_{\mathbf{a}^+ \in \mathbb{R}^{K^+}} E(\mathbf{a}^+). \quad (17)$$

Решение экстремальной задачи (17) сводится к решению ковариационных нормальных уравнений линейного предсказания [Марпл-мл, 1990] и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_o^+ &= (\mathbf{G}^{+T} \mathbf{G}^+) \setminus \mathbf{G}^{+T} \mathbf{x}^+, \\ \mathbf{G}^+ &= (g^+_{i,j}), \quad g^+_{i,j} = s[P^+ + i - j], \\ i &= 1, \dots, N^+ - P^+, \quad j = 1, \dots, K^+, \quad P^+ = K^+ + M^+, \\ \mathbf{x}^+ &= (s[P^+ + 1], \dots, s[N^+ - P^+])^T, \end{aligned} \quad (18)$$

где матрицы и векторы составлены из дискретных отсчетов сигнала (16), $(\cdot \setminus \cdot)$ – оператор левого деления матриц, t – символ транспонирования.

Если корни полинома $\Phi^+(z; \mathbf{a}_o^+)$, сформированного из оптимальных коэффициентов (18) линейного предсказания, являются простыми, то они будут давать наилучшие оценки параметров $(r_{o1}^+, \dots, r_{oK^+}^+)^T = \mathbf{r}_o^+$ модели (6):

$$\mathbf{r}_o^+ : \Phi^+(r_{ok}^+; \mathbf{a}_o^+) = 0, \quad k = 1, \dots, K^+ \quad (19)$$

Соответствующая процедура нахождения простых корней (или наилучшего приближения к ним) достигается алгоритмом полиномиальной факторизации.

Тем самым для модели (6) с корректирующим сигналом $\{u[i^+]\}$ доказана возможность оценки параметров $\{r_k^+\}$ отдельно от знания остальных параметров $\{c_k^+\}, \{b_m^+\}$

Справедливость принципа разделения при оценивании параметров антикаузальной модели (7) доказывается аналогичным образом. Линейная модель предсказания в обратном времени и ассоциированный с ней полином в этом случае принимают вид

$$y[i^-] = a^-[1]y[i^- + 1] + \dots + a^-[K^-]y[i^- + K^-]$$

$$\Phi^-(1/z; \mathbf{a}^-) = \sum_{l=0}^{K^-} a^-[l](1/z)^{K^- - l}.$$

Текущие ошибки предсказания назад, критерий оптимальности для оценивания вектора $\mathbf{a}^- = (a^-[1], \dots, a^-[K^-])^T$ и связанного с ним вектора корней $(r_1^-, \dots, r_{K^-}^-)^T = \mathbf{r}^-$ характеристического полинома, а также выражения для оптимальных оценок $\mathbf{a}_o^-, \mathbf{r}_o^-$ этих векторов приводятся ниже

$$e[i^-] = s[i^-] - \sum_{l=1}^{K^-} a^-[l]s[i^- + l], \quad i^- < -(K^- + M^-)$$

$$\mathbf{a}_o^- = \arg \min_{\mathbf{a}^- \in \mathbb{R}^{K^-}} E(\mathbf{a}^-), \quad E(\mathbf{a}^-) = \sum_{i^- = -(K^- + M^- + 1)}^{-(N^- - 1)} e^2[i^-]$$

$$\mathbf{a}_o^- = (\mathbf{G}^{-T} \mathbf{G}^-) \setminus \mathbf{G}^{-T} \mathbf{x}^-,$$

$$\mathbf{G}^- = (g^-_{i,j}), \quad g^-_{i,j} = s[-(P^- + i - j)],$$

$$i = 1, \dots, N^- - P^-, \quad j = 1, \dots, K^-, \quad P^- = K^- + M^-, \quad (20)$$

$$\mathbf{x}^- = (s[-(P^- + 1)], \dots, s[-(N^- - P^-)])^T,$$

$$\mathbf{r}_o^- : \Phi^-(r_{ok}^-, \mathbf{a}_o^-) = 0, \quad k = 1, \dots, K^-, \quad (21)$$

где предполагается, что известна выборка отсчетов

$$\mathbf{s}^- = (s[0], s[-1], \dots, s[-N^- + 1])^T, \quad N^- > 2K^- + M^-, \quad (22)$$

антикаузального сигнала $\{s[i^-]\}$ (4).

Рассмотрим теперь задачу оптимального оценивания остальных параметров $\{c_k^\pm\}, \{b_m^\pm\}$ моделей (6), (7) в предположении, что оценки параметров $\{r_{ok}^\pm\}$ уже найдены и заданы векторы отсчетов (16), (22) сигнала $\{s[i]\}$.

Введем обозначения

$$\mathbf{q}^+ = (c_1^+, \dots, c_{K^+}^+, b_0^+, \dots, b_{M^+}^+)^T, \quad \mathbf{q}^- = (c_1^-, \dots, c_{K^-}^-, b_0^-, \dots, b_{M^-}^-)^T \quad (23)$$

– векторы-столбцы параметров моделей (6), (7)

$$\mathbf{R}_o^+ = \begin{pmatrix} (r_{o1}^+)^0 & (r_{o2}^+)^0 & \dots & (r_{ok^+}^+)^0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (r_{o1}^+)^1 & (r_{o2}^+)^1 & \dots & (r_{ok^+}^+)^1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ (r_{o1}^+)^{M^+} & (r_{o2}^+)^{M^+} & \ddots & (r_{ok^+}^+)^{M^+} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (r_{o1}^+)^{N^+-2} & (r_{o2}^+)^{N^+-2} & \dots & (r_{ok^+}^+)^{N^+-2} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r_{o1}^+)^{N^+-1} & (r_{o2}^+)^{N^+-1} & \dots & (r_{ok^+}^+)^{N^+-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_o^- = \begin{pmatrix} (r_{o1}^-)^0 & (r_{o2}^-)^0 & \dots & (r_{ok^-}^-)^0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (r_{o1}^-)^1 & (r_{o2}^-)^1 & \dots & (r_{ok^-}^-)^1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ (r_{o1}^-)^{M^-} & (r_{o2}^-)^{M^-} & \ddots & (r_{ok^-}^-)^{M^-} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (r_{o1}^-)^{N^- - 2} & (r_{o2}^-)^{N^- - 2} & \dots & (r_{ok^-}^-)^{N^- - 2} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r_{o1}^-)^{N^- - 1} & (r_{o2}^-)^{N^- - 1} & \dots & (r_{ok^-}^-)^{N^- - 1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

– прямоугольные матрицы, получаемые из уравнений (6), (7) после подстановки в них оптимальных оценок $\{r_{ok}^\pm\}$ и расчета значений выходного сигнала для моментов времени $i^+ = 0, 1, 2, \dots, N^+ - 1$, $i^- = 0, -1, -2, \dots, -N^- + 1$. Матрица \mathbf{R}_o^+ имеет размерность $N^+ \times (K^+ + M^+ + 1)$, а \mathbf{R}_o^- – размерность $N^- \times (K^- + M^- + 1)$. Отметим, что часть элементов этих матриц и векторов (23) являются комплексными, а сами матрицы разрежены.

Если бы исходный сигнал $s[i]$, $i \in \mathbf{Z}$ совпадал с модельным сигналом $y[i]$, $i \in \mathbf{Z}$ (5), то были бы справедливы векторные равенства $\mathbf{s}^+ = \mathbf{R}_o^+ \mathbf{q}^+$, $\mathbf{s}^- = \mathbf{R}_o^- \mathbf{q}^-$, т.е. аппроксимация на основе разностных уравнений (6), (7) была бы идеальной. На практике такая идеальная аппроксимация невозможна, а в каузальной и некаузальной областях наблюдаются ошибки аппроксимации

$$\varepsilon_q^+ = \|\mathbf{s}^+ - \mathbf{R}_o^+ \mathbf{q}^+\|, \quad \varepsilon_q^- = \|\mathbf{s}^- - \mathbf{R}_o^- \mathbf{q}^-\|,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Суммарный квадрат ошибки аппроксимации по двум указанным областям равен

$$\varepsilon_q^2 = \|\mathbf{s}^+ - \mathbf{R}_o^+ \mathbf{q}^+\|^2 + \|\mathbf{s}^- - \mathbf{R}_o^- \mathbf{q}^-\|^2 = (\varepsilon_q^+)^2 + (\varepsilon_q^-)^2. \quad (24)$$

Очевидно, что чем меньше ε_q^2 , тем лучше качество аппроксимации сигнала на конечном выборочном двухстороннем интервале $J_0 = \{-(N^- - 1), \dots, (N^+ - 1)\}$. Кроме того, если значения N^- , N^+ , определяющие границы этого интервала, и частота дискретизации исходного сигнала $s[i]$, $i \in \mathbf{Z}$ выбраны правильно, то выражение (24) может служить показателем качества его аппроксимации моделью (5)-(7) на двухстороннем бесконечном интервале $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

С учетом сказанного, задача наилучшей аппроксимации сигнала $\{s[i]\}$ (1) может быть сведена к решению двух экстремальных задач по критерию минимума квадратической ошибки

$$\mathbf{q}_o^+ = \arg \min_{\mathbf{q}^+} \|\mathbf{s}^+ - \mathbf{R}_o^+ \mathbf{q}^+\|^2, \quad \mathbf{q}_o^- = \arg \min_{\mathbf{q}^-} \|\mathbf{s}^- - \mathbf{R}_o^- \mathbf{q}^-\|^2. \quad (25)$$

Каждая из них определяет соответствующий набор оптимальных значений параметров $\{c_{ok}^+\}, \{b_{om}^+\}$ или $\{c_{ok}^-\}, \{b_{om}^-\}$ моделей (6)-(7), при которых минимизируются квадраты ошибок аппроксимации $(\varepsilon_q^+)^2$ и $(\varepsilon_q^-)^2$, а значит и суммарная ошибка (24). Минимум в критериях (25) берется по всем возможным значениям векторов $\mathbf{q}^+, \mathbf{q}^-$ (23).

Оптимальные значения (25) могут быть найдены путем решения соответствующих нормальных уравнений метода наименьших квадратов [Марпл-мл, 1990] и представлены в виде

$$\mathbf{q}_o^+ = (\mathbf{R}_o^{+H} \mathbf{R}_o^+) \setminus \mathbf{R}_o^{+H} \mathbf{s}^+, \quad \mathbf{q}_o^- = (\mathbf{R}_o^{-H} \mathbf{R}_o^-) \setminus \mathbf{R}_o^{-H} \mathbf{s}^-, \quad (26)$$

где H – символ эрмитового сопряжения, $(\cdot \setminus \cdot)$ – оператор левого деления матриц.

После подстановки найденных оценок параметров $\{c_{ok}^\pm\}, \{r_{ok}^\pm\}, \{b_{om}^\pm\}$ в уравнения (6) (7) получаем наилучшие аппроксимации $\{y_o[i^+]\}, \{y_o[i^-]\}$ для каузальной $\{s[i^+]\}$ и антикаузальной $\{s[i^-]\}$ частей сигнала $\{s[i]\}$. Аппроксимация Прони с корректирующим управлением для всего сигнала на двухстороннем целочисленном интервале \mathbf{Z} получается на основе процедуры объединения (5), которая принимает вид

$$y_o[i] = \begin{cases} y_o[i^+], & i \geq 0 \\ y_o[i^-], & i < 0 \end{cases}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

Вычисление спектра аппроксимирующего сигнала

Аппроксимация $\{y_o[i]\}$ дискретного некаузального сигнала $\{s[i]\}$, полученная на основе модифицированной двухкомпонентной модели Прони (5)-(7), может быть использована для построения его спектральной оценки в виде комплексного спектра

$$P_{od}(jf) = F_d(y_o[i]) = \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_o[i] e^{-j2\pi f \Delta i}, \quad f \in [-f_H, f_H] \quad (28)$$

в дискретно-непрерывном базисе Фурье $\{e^{j2\pi f \Delta i}\}$, где $\Delta, f_d = 1/\Delta$ – интервал и частота дискретизации, соответственно; $f_H = f_d/2$ – частота Найквиста.

Достоинством предложенной модели (5)-(7) является возможность получить простое аналитическое выражение для спектра (28), выразив его через найденные оценки параметров модели $\{c_{ok}^\pm\}, \{r_{ok}^\pm\}, \{b_{om}^\pm\}$.

Для этого воспользуемся известными методами, основанными на применении Z – преобразования $Z(\cdot) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\cdot) z^{-i}$ и его связью с дискретно-непрерывным преобразованием Фурье (ДНПФ) $F_d(\cdot) = \Delta \cdot Z(\cdot) \Big|_{z=e^{j2\pi f \Delta}}$. Тогда комплексные спектры аппроксимирующих сигналов $\{y_o[i^+]\}, \{y_o[i^-]\}$, формируемых каузальной и антикаузальной частями модели (6)-(7), представляются в виде

$$P_{od}^+(jf) = \Delta \cdot Y_o^+(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f \Delta}}, \quad Y_o^+(z) = Z(\{y_o[i^+]\}), \quad (29)$$

$$P_{od}^-(jf) = \Delta \cdot Y_o^-(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f \Delta}}, \quad Y_o^-(z) = Z(\{y_o[i^-]\}), \quad (30)$$

где $Y_o^+(z)$, $Y_o^-(z)$ – Z -преобразования каузального и антикаузального сигналов, соответственно.

Применяя к левой и правой частям уравнения (6) Z -преобразование и используя его свойства, получаем выражение

$$Y_o^+(z) = \sum_{k=0}^{K^+} \frac{c_{ok}^+}{1 - r_{ok}^+ z^{-k}} + \sum_{m=0}^{M^+} b_{om}^+ z^{-m}. \quad (31)$$

Действуя аналогично по отношению к уравнению (7), находим

$$Y_o^-(z) = \sum_{k=0}^{K^-} \frac{c_{ok}^-}{1 - r_{ok}^- z^k} + \sum_{m=0}^{M^-} b_{om}^- z^m. \quad (32)$$

Согласно (5) для получения Z -преобразования $Y_o(z) = Z(\{y_o[i]\})$, отвечающего двухсторонней аппроксимации $\{y_o[i]\} = \{y_o[i^-]\} \cup \{y_o[i^+]\} \ni y_o[0]$, надо объединить $Y_o^+(z)$, $Y_o^-(z)$ и учесть, что в антикаузальной части $Y_o^-(z)$ присутствует Z -преобразование $Z(y_o[0] \cdot \delta[i]) = y_o[0]$ одного отсчета последовательности $\{y_o[i]\}$ в момент $i = 0$, которое уже входит в каузальную часть $Y_o^+(z)$, а значит его надо вычесть. В результате выражение для $Y_o(z)$ принимает вид

$$Y_o(z) = Y_o^+(z) + Y_o^-(z) - y_o[0], \quad (33)$$

а с учетом (29)-(33) комплексный спектр (28) дискретного сигнала $\{y_o[i]\}$ описывается выражением

$$P_{od}(jf) = \Delta \cdot Y_o(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f\Delta}} = \sum_{k=0}^{K^+} \frac{\Delta c_{ok}^+}{1 - r_{ok}^+ e^{-j2\pi f\Delta k}} + \sum_{m=0}^{M^+} \Delta b_{om}^+ e^{-j2\pi f\Delta m} + \\ + \sum_{k=0}^{K^-} \frac{\Delta c_{ok}^-}{1 - r_{ok}^- e^{j2\pi f\Delta k}} + \sum_{m=0}^{M^-} \Delta b_{om}^- e^{j2\pi f\Delta m} - \Delta y_o[0]. \quad (34)$$

Соответствующий амплитудный спектр равен

$$P_{od}(f) = |P_{od}(jf)|, \quad f \in [-f_H, f_H]. \quad (35)$$

Отметим, что входящие в выражение (34) слагаемые

$$P_u^+(jf) = \sum_{m=0}^{M^+} \Delta b_{om}^+ e^{-j2\pi f\Delta m} \quad P_u^-(jf) = \sum_{m=0}^{M^-} \Delta b_{om}^- e^{j2\pi f\Delta m}$$

описывают комплексные спектры сигналов управления (8). Они приводят к дополнительной амплитудно-фазовой коррекции спектра Прони, уменьшая ошибки аппроксимации в спектральной области. Если $u[i^+] = u[i^-] = 0$, то эти корректирующие слагаемые отсутствуют, а выражение (34) будет описывать спектр двухкомпонентной версии классической модели Прони без управления.

Результаты вычислительного эксперимента

Ниже приводится пример аппроксимации сигнала $\{s[i]\}$, полученного в результате дискретизации непрерывного сигнала

$$s(t) = t^3 \exp(-at), \quad t \in \mathbf{R}, \quad a = 5.5, \quad (36)$$

заданного на бесконечном двухстороннем интервале, с комплексным спектром

$$P_s(jf) = 6 \cdot [(a + j2\pi f)^{-4} - (a - j2\pi f)^{-4}]. \quad (37)$$

Отметим, что сигнал (36) является решением линейного дифференциального уравнения 3-го порядка, у которого характеристическое уравнение имеет корень кратности 3. Поэтому процедура дискретной аппроксимации такого сигнала классической экспоненциальной моделью Прони будет приводить к почти кратным полюсам, а значит увеличению ошибок аппроксимации. Покажем, что в этом случае применение модифицированной модели Прони с управлением (8) позволяет значительно улучшить качество аппроксимации.

Для этого каузальная $s^+(t)$ и антикаузальная $s^-(t)$ составляющие сигнала (36) дискретизировались на отрезке времени $T = [-3.5, 3.5]$ [мс] с частотой $f_d = 16$ [кГц] и аппроксимировались предложенной двухкомпонентной моделью (5)-(7) с управлением и экспоненциальной моделью Прони [Марпл-мл, 1990], приспособленной для аппроксимации на двухстороннем интервале времени, но без управления ($u[i^+] = u[i^-] = 0$). Порядок экспоненциальной аппроксимации для двух сравниваемых моделей равен $K^+ = K^- = 3$, а число параметров $\{b_m^+, b_m^-\}$ в сигналах управления (8) выбрано $M^+ = M^- = 5$.

Графики исходного дискретного сигнала $s[i]$, и его аппроксимаций: $s_o[i]$ (модифицированный метод), $s_{pr}[i]$ (известный метод наименьших квадратов Прони) представлены на рис. 1.

Комплексные спектры $P_d(jf) = P_s(jf)$, $P_{od}(jf)$, $P_{prd}(jf)$ этих последовательностей вычислялись по формулам (37) (34). Соответствующие амплитудные ДНПФ-спектры $P_d(f)$, $P_{od}(f)$, $P_{prd}(f)$ на отрезке частот $F = [-f_H, f_H]$ [кГц] изображены на рис. 2.

Видно, что на этих рисунках некоторые графики практически сливаются. Поэтому для более детального анализа качества аппроксимации рассчитывались следующие ошибки:

а) во временной области:

$$\varepsilon[i] = s[i] - s_o[i], \quad \varepsilon_{pr}[i] = s[i] - s_{pr}[i], \quad (38)$$

$$\varepsilon_o = \sqrt{\sum_{i=-N/2}^{N/2+1} \varepsilon^2[i] / N}, \quad \varepsilon_{opr} = \sqrt{\sum_{i=-N/2}^{N/2+1} \varepsilon_{pr}^2[i] / N}, \quad (39)$$

б) в частотной области:

$$\eta[k] = |P_d(jf_k) - P_{od}(jf_k)|, \quad \eta_{pr}[k] = |P_d(jf_k) - P_{prd}(jf_k)|, \quad (40)$$

$$\eta_o = \sqrt{\sum_{k=-N_o/2}^{N_o/2+1} \eta^2[k] / N_o}, \quad \eta_{opr} = \sqrt{\sum_{k=-N_o/2}^{N_o/2+1} \eta_{pr}^2[k] / N_o}, \quad (41)$$

где $N = N_o = 112$ – число отсчетов на интервалах T и F . Графики ошибок (38), (40) приведены на рис. 3 и рис. 4, соответственно.

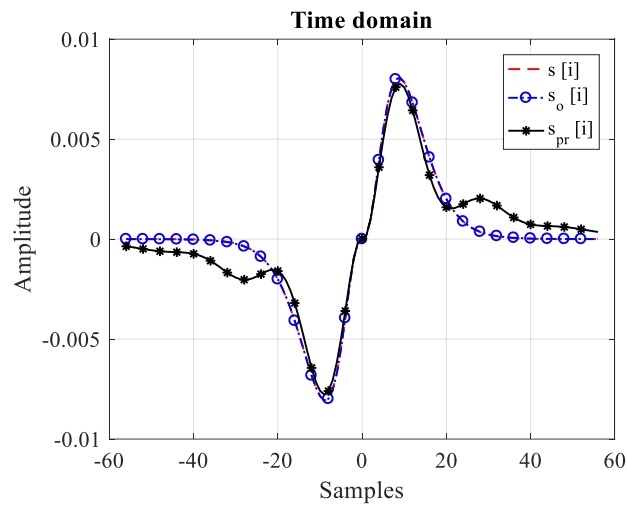


Рис. 1. Дискретные сигналы $s[i]$, $s_o[i]$, $s_{pr}[i]$

Fig. 1. Discrete signals $s[i]$, $s_o[i]$, $s_{pr}[i]$

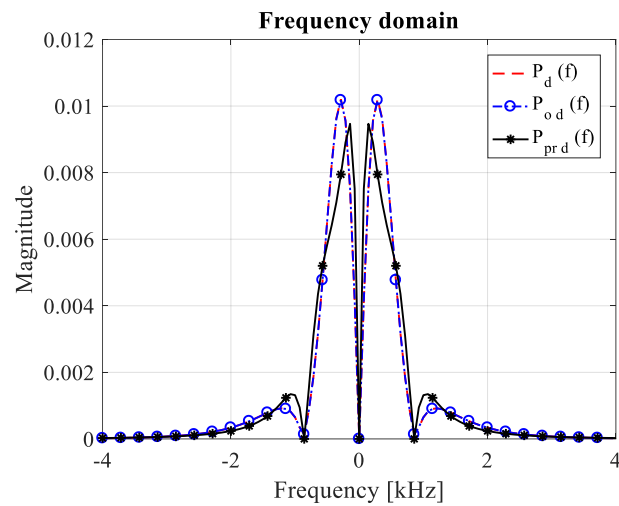


Рис. 2. Амплитудные спектры $P_d(f)$, $P_{od}(f)$, $P_{prd}(f)$

Fig. 2. Amplitude spectra $P_d(f)$, $P_{od}(f)$, $P_{prd}(f)$

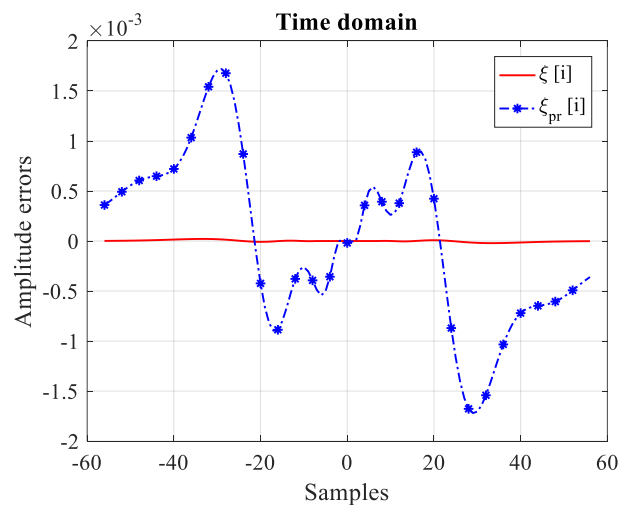


Рис. 3. Ошибки аппроксимации во временной области

Fig. 3. Approximation errors in the time domain

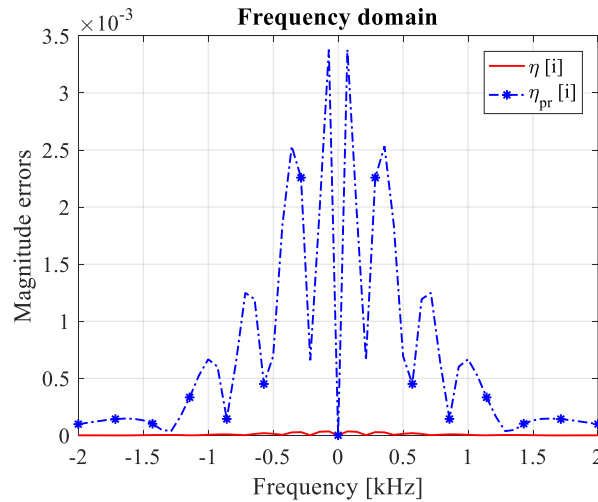


Рис. 4. Ошибки аппроксимации в частотной области
Fig. 4. Approximation errors in the frequency domain

Анализ этих кривых показывает, что предложенный метод аппроксимации позволяет уменьшить текущие ошибки во временной и частотной области более чем в 80 раз. Среднеквадратические ошибки (39), (41) по времени и частоте, соответственно, равны $\varepsilon_o = 1.0e-05$, $\varepsilon_{opr} = 85.8e-06$, $\eta_o = 9.4e-06$, $\eta_{opr} = 803.3e-06$.

Заключение

По результатам работы можно сделать следующие выводы.

1. Удалось расширить метод Прони на некаузальные сигналы, в том числе сигналы, определенные на бесконечном двухстороннем временном интервале. Для этого предложена двухкомпонентная структура модели, состоящая из каузальной и антикаузальной частей и корректный способ их «склейки» во временной и спектральной области.

2. В компоненты модифицированной модели добавлены корректирующие сигналы управления (8), позволяющие существенно расширить ее аппроксимирующие возможности. Эти сигналы за счет специальной структуры действуют только на первые M^+ (или M^-) отсчетов экспоненциальной модели, после чего их действие прекращается. Если преобразовать экспоненциальные части выражений (6) и (7) в рекурсивную форму, то добавление сигналов (8) сводится к дополнительному управлению начальными условиями соответствующего рекурсивного уравнения. Причем это управление будет оптимальным, поскольку параметры $\{b_m^\pm\}$ сигналов (8) рассчитываются по критерию, минимизирующему ошибку аппроксимации (24).

3. Показано, что добавление сигналов управления (8) в модель аппроксимации приводит к появлению в ее спектре дополнительных комплексных слагаемых, которые осуществляют амплитудно-фазовую коррекцию спектра.

4. Получены строгие аналитические выражения для оптимальных оценок параметров предложенной двухкомпонентной модели, а также алгоритмы формирования аппроксимирующего сигнала и его спектра.

5. Результаты сравнительного эксперимента показали, что предложенный в статье модифицированный метод Прони с управлением позволяет в случае кратных полюсов более чем в 80 раз уменьшить ошибки аппроксимации дискретного сигнала и его спектра по сравнению с известным методом Прони.

6. Полученные результаты значительно упрощают синтез и анализ оптимальных алгоритмов обработки сигналов, поскольку для расчета их характеристик во временной и частотной области достаточно знать небольшой конечный набор модельных параметров и нет необходимости привлекать численные методы.

Список литературы

- Волчков В.П. 2009. Новые технологии передачи и обработки информации на основе хорошо локализованных сигнальных базисов. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 15(70): 181–189.
- Волчков В.П., Антипова А.Н. 2022. Синтез аналоговых фильтров Гильберта и исследование их характеристик. Экономика. Информатика, 49(2): 416–431. DOI 10.52575/2687-0932-2022-49-2-416-431.
- Волчков В.П., Асирян В.М. 2020. Сжатие изображений с использованием дискретного преобразования Вейля-Гейзенберга. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 47 (2): 412–421
- Волчков В.П., Асирян В.М. 2021. Возможности преобразования Вейля-Гейзенберга в стандарте сжатия jpeg. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 48(1): 188–200.
- Волчков В.П., Мирошниченко А.В. 2018. Вычисление эллиптических функций Якоби для расчета характеристик фильтра Кауэра. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. 45(2): 298–311.
- Волчков В.П., Петров Д.А. 2009. Оптимизация ортогонального базиса Вейля-Гейзенберга для цифровых систем связи, использующих принцип OFDM/OQAM передачи. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 1(56): 102–112.
- Волчков В.П., Петров Д.А. 2009. Условия ортогональности обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга для OFTDM сигналов. Научные ведомости БелГУ. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. 15(70): 190–199.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2016. Синтез канальных прекодеров для цифровых систем связи с финитным сигнальным базисом. Электросвязь. 4: 41–45.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2017. Оптимальное канальное прекодирование с ограничением уровня пульсаций на краях символьного интервала. Электросвязь. 6: 35–39.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2018. Синтез оптимальных предискаженных финитных сигналов на основе желаемого эталона. Электросвязь. 5: 26–30.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2019. Синтез ортогональных вещественных сигнальных базисов Вейля-Гейзенберга на основе алгебраического подхода. Электросвязь. 5: 24–30.
- Волчков В.П., Санников В.Г. 2020. Синтез банка фильтров на основе комплексного базиса Вейля-Гейзенберга. Электросвязь. 5: 98–102.
- Марпл-мл С.Л. 1990. Цифровой спектральный анализ и его приложения. Пер. с англ. М., Мир, 584. (S. Lawrence. Marple, Jr., 1987. Digital Spectral Analysis with Applications. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 584).
- Оппенгейм А., Шафер Р.Ц. 2006. Цифровая обработка сигналов. 3-е изд. Пер. с англ. М., Техносфера, 856. (Oppenheim A.V., Schafer R.W. 1999. Discrete-Time Signal Processing. 3rd Edition, Prentice Hall, 2009, 856).
- Смит С. 2012. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. Пер. с англ. М., Додэка-XXI, 720. (Smith S.W. Digital Signal Processing. A Practical Guide for Engineers and Scientists. Newnes, 2003).
- Hussen A., He W. Prony, 2022. Method for Two-Generator Sparse Expansion Problem. Mathematical and Computational Applications 27(4). July 2022. DOI:10.3390/mca27040060
- Janith I., Herath H., Amarasinghe D.A.S, Attygalle D. 2022. A Novel Method on Fitting A Short Prony Series Using Creep or Stress Relaxation Data. Conference: 2022 Moratuwa Engineering Research Conference (MERCon), DOI:10.1109/MERCon55799.2022.9906185.
- Khodaparast J., Fosso O.B., Molinas M. Phasor Estimation Based on Modified Recursive Prony. Conference: 2nd IEEE Conference on Control Technology and Applications - IEEE CCTA 2018. DOI:10.1109/CCTA.2018.8511393.

- Keller I., Plonka G. 2021. Modifications of Prony's method for the recovery and sparse approximation of generalized exponential sums. *Mathematics & Statistics*, 2021, vol 336, Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-57464-2_7
- Levy E.C. 1959. "Complex-curve fitting", in *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-4, no. 1, pp. 37-43, doi: 10.1109/TAC.1959.6429401.
- Plonka G., Tasche M. 2014. Prony methods for recovery of structured functions. *GAMM-Mitteilungen*, Vol. 37, Issue 2, pp 239-258, November 2014.
- Rabiner L.R., Gold B. 1975. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1975.
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2018. Noise stability of transmission of optimum finite signals on the linear communication channel with aliquot poles. 2018 *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018)*. Item #: 40677. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2019. Digital Coherent Modem with Space-Time Transmission and Reception of Optimal Finite Signals. *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*", Russia, 2019, pp. 1–5. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8814114)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2020. Multi-Carrier Modulations Digital Modem with the narrow-band Optimal Signals and high spectral energy Efficiency. 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA). Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032586, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213281.
- Hu S.-L. James, Yang W.-L., Li H.-J. 2013. Signal. decomposition and reconstruction using complex exponential models. *Mechanical Systems and Signal Processing* 40(2):421-438, November 2013. DOI:10.1016/j.ymssp.2013.06.037.
- Skrzipek M.-R. 2017. Signal recovery by discrete approximation and a Prony-like method. December 2017 *Journal of Computational and Applied Mathematics* 326(3–4): 193-203. DOI:10.1016/j.cam.2017.05.029
- Skrzipek M.-R. 2021. Parameter estimation and signal reconstruction. September 2021, *Calcolo* 58(3). DOI:10.1007/s10092-021-00431-8.
- Ahn S., Koh J. 2022. RCS Prediction Using Prony Method in High-Frequency Band for Military Aircraft Models. Gyeongsang National University. November 2022. DOI:10.3390/aerospace9110734
- Lin T., Li Yu., Lin Yu., Jian Ch. 2022. Magnetic resonance sounding signal extraction using the shaping-regularized Prony method. August 2022. *Geophysical Journal International* 231(3). DOI:10.1093/gji/ggac317.
- Volchkov V. et al. 2019. Improving the Noise Immunity of the Modem with the Optimal Finite Signals that do not Cause Intersymbol Interference in a Linear Communication Channel., 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508. Item #: 48657. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc.
- Volchkov V. et al. 2019. Presentation and Analysis of Continuous Signals in the Space of Complex Exponential Models. 2019 *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*", Russia, 2019, pp. 1–6. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8813941)
- Volchkov V. et al. 2019. Synthesis of Real Weyl-Heisenberg Signal Frames with Desired Frequency-Time Localization, 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), (doi:10.23919/FRUCT.2019.8711969)
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Algebraic approach to the optimal synthesis of real signal Weyl-Heisenberg bases. *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018)*. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018): 135–142.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2020. Syntheses of a Frequency-Time Filter Bank Based on Weyl-Heisenberg Complex Bases. 22th International Conference on Digital Signal Processing and its

Applications (DSPA)." Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032584, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213251.

Volchkov V.P., Sannikov V.G., Manonina I.V. 2019. Presentation and Analysis of Continuous Signals in the Space of Complex Exponential Models. "2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO) ", Russia, 2019, pp. 1-6. doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8813941.

References

- Volchkov V. et al. 2019. Improving the Noise Immunity of the Modem with the Optimal Finite Signals that do not Cause Intersymbol Interference in a Linear Communication Channel., 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508. Item #: 48657. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc.
- Volchkov V. et al. 2019. Presentation and Analysis of Continuous Signals in the Space of Complex Exponential Models. 2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)", Russia, 2019, pp. 1–6. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8813941)
- Volchkov V. et al. 2019. Synthesis of Real Weyl-Heisenberg Signal Frames with Desired Frequency-Time Localization, 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT), Moscow, Russia: 502–508. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), (doi:10.23919/FRUCT.2019.8711969)
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Algebraic approach to the optimal synthesis of real signal Weyl-Heisenberg bases. Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018). Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018): 135–142.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2020. Syntheses of a Frequency-Time Filter Bank Based on Weyl-Heisenberg Complex Bases. 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA)." Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032584, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213251.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G., Manonina I.V. 2019. Presentation and Analysis of Continuous Signals in the Space of Complex Exponential Models. "2019 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO) ", Russia, 2019, pp. 1-6. doi: 10.1109/SYNCHROINFO.2019.8813941.
- Volchkov V.P. 2009. A new technology of transmitting and processing of information based on welllocalized signal basis. Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies. 15(70): 181–189.
- Volchkov V.P., Antipova A.N. 2022. Synthesis of Analog Hilbert Filters and Research of Their Characteristics. Economics. Information technologies, 49(2): 416–431 (in Russian). doi 10.52575/2687-0932-2022-49-2-416-431.
- Volchkov V.P., Asiryanyan V.M. 2020. Image Compression Using Discrete Weyl-Heisenberg Transform. Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies. 47(2): 412–421.
- Volchkov V.P., Asiryanyan V.M. 2021. Possibilities of the Weyl-Heisenberg transformation in the jpeg compression standard. Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies. 48(1): 188–200.
- Volchkov V.P., Miroshnichenko A.V. 2018. Calculating the Jacobi Elliptic Functions to calculate the characteristics of Cauer filter. Belgorod State University Scientific Bulletin. Economics. Information technologies. 45(2): 298–311.
- Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Orthogonal Weyl-Heisenberg basis optimisation for digital communication systems based on OFDM/OQAM. Nauchnye vedomosti belgu. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika. [Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies]. 1(56): 102–112.

- Volchkov V.P., Petrov D.A. 2009. Generalized Weyl-Heisenberg bases orthogonality conditions for OFTDM signals. *Belgorod State University Scientific Bulletin. History Political science Economics Information technologies*. 15(70): 190–199.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2016. Synthesis of channel precoder for digital communication systems with finite signal basis. *Electrosvyaz*. 4: 41–45.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2017. Optimal channel precoding with restriction level pulsation at the edges of the symbol interval. *Electrosvyaz*. 6: 35–39.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2018. Synthesis of optimal preemphasis finite signals based on the desired reference. *Electrosvyaz*. 5: 26–30.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2019. Synthesis of orthogonal real signal bases Weyl-Heisenberg based on algebraic approach. *Electrosvyaz*. 5: 24–30.
- Volchkov V.P., Sannikov V.G. 2020. Synthesis of a filter bank based on Weyl-Heisenberg complex basis. *Electrosvyaz*. 5: 98–102.
- Hussen A., He W. Prony, 2022. Method for Two-Generator Sparse Expansion Problem. *Mathematical and Computational Applications* 27(4). July 2022. DOI:10.3390/mca27040060
- Janith I., Herath H., Amarasinghe D.A.S, Attygalle D. 2022. A Novel Method on Fitting A Short Prony Series Using Creep or Stress Relaxation Data. Conference: 2022 Moratuwa Engineering Research Conference (MERCon), DOI:10.1109/MERCon55799.2022.9906185.
- Khodaparast J., Fosso O.B., Molinas M. Phasor Estimation Based on Modified Recursive Prony. Conference: 2nd IEEE Conference on Control Technology and Applications - IEEE CCTA 2018. DOI:10.1109/CCTA.2018.8511393.
- Keller I., Plonka G. 2021. Modifications of Prony's method for the recovery and sparse approximation of generalized exponential sums. *Mathematics & Statistics*, 2021, vol 336, Springer, Cham. doi: 10.1007/978-3-030-57464-2_7
- Levy E.C. 1959. "Complex-curve fitting", in *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-4, no. 1, pp. 37-43, doi: 10.1109/TAC.1959.6429401.
- Plonka G., Tasche M. 2014. Prony methods for recovery of structured functions. *GAMM-Mitteilungen*, Vol. 37, Issue 2, pp 239-258, November 2014.
- Rabiner L.R., Gold B. 1975. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1975.
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2018. Noise stability of transmission of optimum finite signals on the linear communication channel with aliquot poles. *2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO 2018)*. Item #: 40677. Publ: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), POD Publ: Curran Associates, Inc. (Oct 2018)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2019. Digital Coherent Modem with Space-Time Transmission and Reception of Optimal Finite Signals. *Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*", Russia, 2019, pp. 1–5. (doi: 10.1109/SYNCHROINFO. 2019.8814114)
- Sannikov V.G., Volchkov V.P. 2020. Multi-Carrier Modulations Digital Modem with the narrow-band Optimal Signals and high spectral energy Efficiency. *22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA)*. Pub.: IEEE. 06 October 2020, Moscow, Russia, INSPEC Accession Number: 20032586, doi: 10.1109/DSPA48919.2020.9213281.
- Hu S.-L. James, Yang W.-L., Li H.-J. 2013. Signal. decomposition and reconstruction using complex exponential models. *Mechanical Systems and Signal Processing* 40(2):421-438, November 2013. DOI:10.1016/j.ymssp.2013.06.037.
- Skrzipek M.-R. 2017. Signal recovery by discrete approximation and a Prony-like method. December 2017 *Journal of Computational and Applied Mathematics* 326(3–4): 193-203. DOI:10.1016/j.cam. 2017.05.029
- Skrzipek M.-R. 2021. Parameter estimation and signal reconstruction. September 2021, *Calcolo* 58(3). DOI:10.1007/s10092-021-00431-8.
- Ahn S., Koh J. 2022. RCS Prediction Using Prony Method in High-Frequency Band for Military Aircraft Models. *Gyeongsang National University*. November 2022. DOI:10.3390/aerospace9110734

- Lin T., Li Yu., Lin Yu., Jian Ch. 2022. Magnetic resonance sounding signal extraction using the shaping-regularized Prony method. August 2022. *Geophysical Journal International* 231(3). DOI:10.1093/gji/ggac317.
- Lawrence S., Marple Jr. 1987. *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 584.
- Oppenheim A.V., Schaffer R.W. 1999. *Discrete-Time Signal Processing*. 3rd Edition, Prentice Hall, 2009, 856.
- Smith S.W. *Digital Signal Processing. A Practical Guide for Engineers and Scientists*. Newnes, 2003.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: о potential conflict of interest related to this article was reported.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Волчков Валерий Павлович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общей теории связи, Московский технический университет связи и информатики г. Москва, Россия

Потапова Екатерина Алексеевна, старший преподаватель кафедры общей теории связи, Московский технический университет связи и информатики г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Valery P. Volchkov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of General Communication Theory, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russian Federation

Ekaterina A. Potapova, senior teacher of the Department of General Communication Theory, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russian Federation