

УДК 621.39

DOI 10.52575/2687-0932-2023-50-2-448-455

## Формирование сигнально-кодовых конструкций с возможностью восстановления искаженных фрагментов

<sup>1</sup> Помазанов И.С., <sup>2</sup> Жилияков Е.Г.

<sup>1</sup> Общество с ограниченной ответственностью Микрокредитная компания «Денежная единица»,  
Россия, 308009, г. Белгород, Народный бульвар, 79, офис 407

<sup>2</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
E-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru

**Аннотация.** В статье рассматривается задача восстановления искажённых фрагментов сигнально-кодовой конструкции (СКК) под влиянием внешних помех. Показано, что такое восстановление возможно при формировании сигнально-кодовых конструкций на основе базиса собственных векторов субполсных матриц, которые соответствуют единичным собственным числам. Получены соотношения для восстановления в виде системы алгебраических уравнений. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующих работоспособность предложенного метода. Оценено соотношение между количеством собственных векторов, используемых для комбинации и длительностью восстанавливаемого отрезка.

**Ключевые слова:** сигнально-кодовые конструкции, электромагнитная совместимость

**Для цитирования:** Помазанов И.С., Жилияков Е.Г. 2023. Формирование сигнально-кодовых конструкций с возможностью восстановления искаженных фрагментов. Экономика. Информатика, 50(2): 448–455. DOI: 10.52575/2687-0932-2023-50-2-448-455

---

## Formation of Signal-Code Constructions with the Possibility of Restoring Distorted Fragments

<sup>1</sup> Ivan S. Pomazanov, <sup>2</sup> Evgeniy G. Zhilyakov,

<sup>1</sup> Limited Liability Company Micro-credit company «Denezhnaya edinica»,  
79 Narodny Boulevard, office 407, Belgorod, Russia, 308009

<sup>2</sup> Belgorod State National Research University,  
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia  
E-mail: zhilyakov@bsu.edu.ru

**Abstract.** This paper considers the problem of restoring distorted fragments of a signal-code construction (SCC) under the influence of external interference. It is demonstrated that such restoration is possible by forming signal-code constructions based on the basis of eigenvectors of sub-pulse matrices, which correspond to unit eigenvalues. Relationships for restoration in the form of a system of algebraic equations are derived. The computational experiment results are presented, demonstrating the effectiveness of the proposed method. The relationship between the number of eigenvectors used for combination and the duration of the restored segment is evaluated.

**Keywords:** signal-code constructions, electromagnetic compatibility

**For citation:** Pomazanov I.S., Zhilyakov E.G. 2023. Formation of Signal-Code Constructions with the Possibility of Restoring Distorted Fragments. Economics. Information technologies, 50(2): 448–455 (in Russian). DOI: 10.52575/2687-0932-2023-50-2-448-455

---

## Введение

Тенденцией настоящего времени является повышение интенсивности удаленного информационного обмена, связанного как с взаимодействием людей, так и наличием различного рода датчиков, фиксирующих различные процессы.

В качестве примера можно привести концепцию интернет вещей, когда данные передаются в произвольный момент времени. Это приводит к конкуренции за частотно-временные ресурсы каналов связи. В частности, могут возникнуть ситуации одновременной работы нескольких источников электромагнитного излучения, кроме того, в условиях городской застройки проявляется эффект многолучевого распространения. Всё это приводит к неконтролируемым искажениям канальных сигналов и ухудшению условий декодирования сигнально-кодовых конструкций. Поэтому актуальной является задача синтеза таких сигнально-кодовых конструкций, которые позволяют восстановить фрагменты, искаженные кратковременными воздействиями посторонних источников электромагнитного излучения. [Жежеленко и др., 2012; Ефанов, Тихомиров, 2012; Коржов, 2007; Малков, Пудовкин, 2007; Стукалов, 2019; Тимиргазин, 2017; Быховский, 2011]

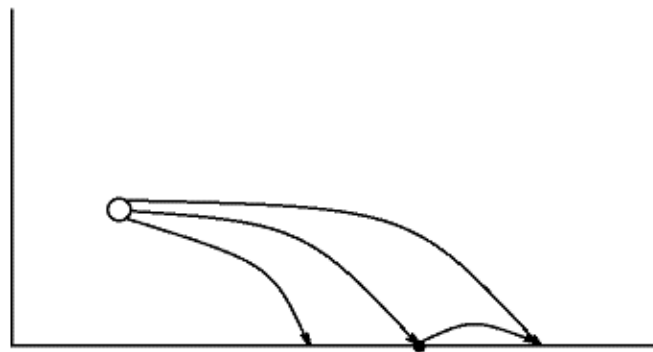


Рис. 1. Помеха в виде отражения в многолучевом распространении  
 Fig. 1. Interference in the form of reflection in multipath propagation

### Субполосный синтез сигнально-кодовых конструкций

В дальнейшем предполагаем, что СКК формируются в виде вектора некоторой размерности  $N$ . Примером простейшей СКК при цифровой передаче информации служит вектор следующего вида

$$\vec{x} = e\vec{g}, \quad (1)$$

где  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)'$ ;  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_N)'$  – базисный вектор, штрих означает транспонирование;

$$e = \{-1, 1\}. \quad (2)$$

Передача данных предполагает использование некоторого частотного диапазона (субполосы) нормированной круговой частоты

$$V = [-V_2, -V_1) \cup [V_1, V_2), \quad (3)$$

так что для спектра Фурье СКК

$$X(z) = \sum_{k=1}^N x_k \exp(-jz(i-1)), \quad (4)$$

должно выполняться условие

$$1 - P_V(\bar{x}) / \|\bar{x}\|^2 \ll 1, \quad (5)$$

где с учетом соотношений (1) и (2) имеется в виду энергия ССК

$$\|\bar{x}\|^2 = \sum_{k=1}^N x_k^2 = \sum_{k=1}^N g_k^2; \quad (6)$$

и попадающая в субполосу (3) часть её энергии, которая определяется соотношением

$$P_V(\bar{x}) = \int_{z \in V} |X(z)|^2 dz / 2\pi = P_V(\bar{g}) = \int_{z \in V} |G(z)|^2 dz / 2\pi, \quad (7)$$

здесь  $G(z)$  спектр Фурье вида (4) базисного вектора.

Таким образом, левая часть соотношения (5) определяет просачивание энергии ССК за пределы выделенной субполосы, что может служить мерой межканальной интерференции. Поэтому основным условием при синтезе ССК служит вариационное условие максимизации при заданной её размерности (длительности передачи) доли энергии, попадающей в заданную субполосу, которое с учетом (6) и (7) имеет вид

$$d = P_V(\bar{g}) / \|\bar{g}\|^2 = \max. \quad (8)$$

Для решения этой вариационной задачи в последнее слагаемое (7) подставим определение спектра Фурье вида (4) для базисного вектора. В результате (8) преобразуется к виду

$$d = \bar{g}' A_V \bar{g} / \|\bar{g}\|^2, \quad (9)$$

где  $A_V = \{a_{ik}^V\}, i, k = 1, \dots, N$  – субполосная матрица, элементы которой определяются соотношениями

$$a_{ik}^V = \int_{z \in V} \exp(-j(i-k)z) dz / 2\pi. \quad (10)$$

После интегрирования с учетом симметрии субполосы нетрудно получить соотношения

$$a_{ii}^V = (V - V_1) / \pi, i = 1, \dots, N; \quad (11)$$

$$a_{ik}^V = (\sin(V_2(i-k)) - \sin(V_1(i-k))) / \pi(i-k), i \neq k. \quad (12)$$

Таким образом, субполосная матрица является теплицевой и в виду определения (7) положительно определенной. Поэтому она представима в следующем виде

$$A_V = Q_V L_V Q_V', \quad (13)$$

где  $L_V$  – диагональная матрица положительных собственных чисел

$$L_V = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad (14)$$

которые предполагаются упорядоченными по убыванию

$$\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_N > 0, \quad (15)$$

а  $Q_V = \{\vec{q}_1^V \dots \vec{q}_N^V\}$  – ортогональная матрица соответствующих собственных векторов

$$Q_V' Q_V = Q_V Q_V' = I = \text{diag}(1, \dots, 1), \quad (16)$$

и справедливо соотношение

$$A_V Q_V = Q_V L_V. \quad (17)$$

В соответствии с определением собственных векторов и чисел [Беллман, 1969] решением вариационной задачи (8) является вектор

$$\bar{g} = c \bar{q}_1^V, \quad (18)$$

где  $c > 0$  положительный вещественный коэффициент пропорциональности, а отношение (9) равно максимальному собственному числу субполосной матрицы

$$d = \lambda_{\max}. \quad (19)$$

Таким образом, оптимальный в смысле требования (8) вектор определяется уравнением

$$\lambda_{\max} \bar{g} = A_V \bar{g}. \quad (20)$$

Пусть далее

$$\bar{g} = (\bar{g}_1', \bar{g}_2')', \quad (21)$$

где имеются в виду под векторы  $\bar{g}_1' = (g_1, \dots, g_M)$ ;  $\bar{g}_2' = (g_{M+1}, \dots, g_N)$ .

Легко понять, что из уравнения (19) следует уравнение для первого подвектора

$$\lambda_{\max} \bar{g}_1 = A_{11}^V \bar{g}_1 + A_{12}^V \bar{g}_2, \quad (22)$$

где  $A_{11}^V = \{a_{ik}^V\}, i, k = 1, \dots, M$ ;  $A_{12}^V = \{a_{ik}^V\}, i = 1, \dots, M, k = M + 1, \dots, N$ .

Имея в виду единичную матрицу (16) соответствующей размерности, отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнения (СЛАУ)

$$(\lambda_{\max} I - A_{11}^V) \bar{g}_1 = A_{12}^V \bar{g}_2. \quad (23)$$

Ясно, что если определитель матрицы в левой части не равен нулю

$$D = \det(\lambda_{\max} I - A_{11}^V) \neq 0, \quad (24)$$

то решение этой СЛАУ имеет следующий вид

$$\bar{g}_1 = B_M^V \bar{g}_2, \quad (25)$$

где

$$B_M^V = (\lambda_{\max} I - A_{11}^V)^{-1} A_{12}^V. \quad (26)$$

Таким образом, получено соотношение (25), которое определяет метод вычисления одного подвектора СКК по другой. Подобные соотношения можно получить и для других подвекторов. Иными словами, можно получить СЛАУ, позволяющие восстанавливать искаженные подвекторы (18) по остальным, которые предполагаются неискаженными.

Сопоставив соотношения (7), (8) и (19), нетрудно понять, что максимальное собственное число определяет долю энергии базисного вектора СКК (18), попадающей в заданную субполосу. В работе [Жилияков, 2015] показано, что максимальное собственное число

субполосной матрицы не превосходит единицы. Поэтому необходимо с достаточной точностью обеспечивать условие

$$\varepsilon = 1 - \lambda_{\max} \ll 1. \quad (27)$$

С другой стороны, необходимо принимать во внимание условие (24), чтобы соотношение восстановления (25) было справедливо. Ясно, что матрица  $A_{11}^V$  также является субполосной и меньшей размерности. Поэтому для нее справедливо представление вида (13), в котором в диагональную матрицу упорядоченных по убыванию собственных чисел обозначены в виде

$$F = \text{diag}(f_1, \dots, f_{N-1}). \quad (28)$$

В этих обозначениях определитель матрицы в (24) можно представить в виде следующего произведения

$$D = \prod_{k=1}^{N-1} (\lambda_{\max} - f_k). \quad (29)$$

Таким образом, гарантией выполнения условия неособенности (24) для матрицы (26) максимальное собственное число матрицы  $A_{11}^V$  должно удовлетворять неравенству

$$f_1 < \lambda_{\max}, \quad (30)$$

для её размерности вплоть до  $N-1$ , что позволяет восстанавливать подвектор  $\vec{g}_1$  только по одному значению вектора СКК (18).

В работе [Жилияков, 2015] показано, что среди собственных чисел субполосной матрицы могут быть весьма близкие к единице. Их число определяется приближенно

$$J = [(V_2 - V_1)K / \pi] - 4, \quad (31)$$

в котором квадратные скобки означают целую часть числа, а  $K$  – размерность матрицы. Таким образом, при выполнении неравенства

$$K \leq 2\pi / (V_2 - V_1) \quad (32)$$

равных единице собственных чисел не будет

Пусть теперь размерность  $N$  исходной матрицы  $A_V$  удовлетворяет неравенству (32). Положим,

$$\vec{y} = (\vec{w}', 0)', \quad (33)$$

где  $\vec{w}'$  – собственный вектор матрицы  $A_{11}^V$  размерности  $N-1$ , который соответствует максимальному собственному числу, так что справедливо соотношение

$$f_1 = \vec{w}' A_{11}^V \vec{w}. \quad (34)$$

Поэтому, с учетом определения этой матрицы, как углового квадратного блока матрицы  $A_V$  и определений (8) и (18), нетрудно показать справедливость неравенства

$$f_1 = \vec{y}' A_V \vec{y} < \lambda_{\max}. \quad (35)$$

Таким образом, условие (30) может быть выполнено. Вычисления показывают, что выбор субполосы с границами

$$V_1 = 0; V_2 = 2\pi / N \quad (36)$$

позволяет выполнить неравенства (27) и (30). Этот вывод иллюстрируют данные приведенной ниже Таблицы 1.

Таблица 1  
Table 1

Значения максимальных собственных чисел  
Values of maximum eigenvalues

N	10	40	100	400
$\lambda_{\max}$	0,9823	0,9811	0,9811	0,9811
$f_1$	0,9695	0,9784	0,9800	0,9808

Как и следовало ожидать с ростом размерностей разница между максимальными собственными числами уменьшается.

Заметим, что матрицы вида (26) можно вычислить заранее на приемной стороне и затем использовать. Очевидно, что при выполнении равенства

$$M = N - 1, \quad (37)$$

когда

$$A_{12}^V = (a_{1N}^V, a_{2N}^V, \dots, a_{N-1,N}^V)' \quad (38)$$

матрица (26) тоже будет вектором-столбцом, который пропорционален части используемого собственного вектора

$$B_{N-1}^V = \bar{u} = (q_{11}^V, \dots, q_{N-1,1}^V)' / q_{N1}^V. \quad (39)$$

Отметим, что знаменатель в (39) гораздо меньше единицы, так как евклидова норма собственного вектора равна единице. Поэтому на результат восстановления будет сильно влиять наличие флуктуационных шумов канала связи.

Рассмотрим теперь случай формирования СКК в виде линейной комбинации собственных векторов, которые в виду (16) будут ортонормальными

$$\bar{x} = c \sum_{k=1}^K e_k \bar{q}_k, \quad (40)$$

где

$$e_k \in \{-1, 1\}, k = 1, \dots, K. \quad (41)$$

При этом предполагаем, что выбрано такое значение следа субполосной матрицы (содержимое в квадратных скобках (31)), обеспечивающее наличие  $K$  равных единице собственных чисел, которым и соответствуют входящие в (40) собственные векторы. В Таблице 2 ниже приводятся примеры, показывающие достижимость этого требования. В этом примере в качестве границ субполосы использовались следующие значения

$$V_1 = 0; V_2 = \pi / 4. \quad (42)$$

Эти данные показывают, что таких векторов может быть довольно много, причем энергии векторов (40) будут практически полностью сосредоточены в субполосе (42).

Таблица 2  
 Table 2

Количество единичных собственных чисел и доля восстанавливаемых компонент ССК  
 The number of unit eigenvalues and the fraction of the recoverable component of the SSC

$N$	16	40	100	400	800
Значение следа матрицы	4	10	25	100	200
Количество единичных собственных чисел $K$	1	6	20	94	192
Процент восстанавливаемых значений $p$	50	20	8	2	1

Кроме того, вектор (4) будет также собственным вектором субполосных матриц с элементами вида (11), (12), которым соответствует собственное единичное число

$$\vec{x} = A_v \vec{x}. \quad (43)$$

При этом уравнение восстановления (23) принимает вид

$$(I - A_{11}^V) \vec{x}_1 = A_{12}^V \vec{x}_2, \quad (44)$$

где

$$\vec{x}_1 = (x_1, \dots, x_M)'; \quad \vec{x}_2 = (x_{M+1}, \dots, x_N)'. \quad (45)$$

Возникает необходимость определить допустимую размерность подматрицы  $A_{11}^V$ , когда матрица в левой части (44) будет неособенной. Приближенную оценку снизу можно получить из соотношения

$$2\pi / M = V_2, \quad (45)$$

если принять во внимание соотношение (36) и данные Таблицы 1.

Отсюда получаем соотношение

$$M = 2\pi / V_2, \quad (46)$$

которые в соответствии с (42) дает

$$M = 8. \quad (47)$$

Это значение использовано при заполнении третьей строки Таблицы 2 при вычислении процента восстанавливаемых компонентов вектора ССК, как отношения

$$p = 100M / N. \quad (48)$$

### Заключение

Разработан метод формирования сигнально- кодовых конструкций для цифровой передачи информации, который позволяет восстанавливать их искаженные фрагменты по неискаженным. Показано, что для этого целесообразно использовать собственные векторы субполосных матриц, которые также гарантируют полное попадание энергии ССК в заданном частотном интервале (субполосе). Получены уравнения восстановления и установлены условия его разрешимости в виде соотношения для размерности фрагментов, доступных для восстановления.

### Список литературы

Беллман Р. 1969. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 375 с.

- Быховский М.А. 2011. Оптимальная линейная коррекция многолучевого канала связи при разнесенном приеме сигналов. *Электросвязь*. 12: 36–41.
- Ефанов В.И., Тихомиров А.А. 2012. Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств и систем. Учебное пособие. Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 228 с.
- Жежеленко И.В., Шидловский А.К., Пивняк Г.Г. и др. 2012. Электромагнитная совместимость потребителей. Монография. М.: Машиностроение, 351 с.
- Жиляков Е.Г. 2015. Оптимальные субполосные методы анализа и синтеза сигналов конечной длительности, *Автомат. и телемех.* 4: 51–66.
- Коржов А.В. 2007. Электромагнитная совместимость в электроэнергетике. Учебное пособие для самостоятельной работы студентов. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 70 с.
- Малков Н.А., Пудовкин А.П. 2007. Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств. Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 88 с.
- Стукалов С.Б. 2019. Электромагнитная совместимость радиоэлектронных систем. Учебное пособие. Воронеж: ООО «МИР», 64 с.
- Тимиргазин Р.Ф. 2017. Электромагнитная совместимость. Учебное пособие. Ульянов. гос. техн. ун-т. Ульяновск: УлГТУ, 48 с.

### References

- Bellman R. 1969. *Vvedeniye v teoriyu matrits* [Introduction to Matrix Theory]. M.: Nauka, 375 p.
- Byhovskij M.A. 2011. Optimal'naya lineynaya korrektsiya mnogoluchevogo kanala svyazi pri raznesennom priyeme signalov [Optimal linear correction of a multipath communication channel with a spaced signal reception]. *Elektrosvyaz'*. 12: 36–41.
- Efanov V.I., Tikhomirov A.A. 2012. *Elektromagnitnaya sovmestimost' radioelektronnykh sredstv i sistem. Uchebnoye posobiye* [Electromagnetic compatibility of radio-electronic means and systems. Textbook]. Tomsk: Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, 228 p.
- ZHezhelenko I.V., SHidlovskij A.K., Pivnyak G.G. et al. 2012. *Elektromagnitnaya sovmestimost' potrebiteley. Monografiya* [Electromagnetic compatibility of consumers]. M.: Mashinostroenie, 351 p.
- Zhilyakov E.G. 2015. Optimal sub-band methods for analysis and synthesis of finite-duration signals. *Automation and Remote Control*. 76(4): 589–602.
- Korzhov A.V. 2007. *Elektromagnitnaya sovmestimost' v elektroenergetike. Uchebnoye posobiye dlya samostoyatel'noy raboty studentov* [Electromagnetic compatibility in the electric power industry. A textbook for independent work of students]. Chelyabinsk: publisher YUUrGU, 70 p.
- Malkov N.A., Pudovkin A.P. 2007. *Elektromagnitnaya sovmestimost' radioelektronnykh sredstv. Ucheb. posobiye* [Electromagnetic compatibility of radio-electronic means. Study guide]. Tambov, 88 p.
- Stukalov S.B. 2019. *Elektromagnitnaya sovmestimost' radioelektronnykh sistem. Uchebnoye posobiye* [Electromagnetic compatibility of radio-electronic systems. Study guide]. Voronezh: ООО «МИР», 64 p.
- Timirgazin R.F. 2017. *Elektromagnitnaya sovmestimost'. Uchebnoye posobiye* [Electromagnetic compatibility. Study guide]. Ulyanovsk: UIGTU, 48 p.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Помазанов Иван Сергеевич**, инженер технической поддержки корпоративных информационных систем (КИС). Общество с ограниченной ответственностью Микрокредитной компании «Денежная единица», г. Белгород, Россия

**Жиляков Евгений Георгиевич**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационно-телекоммуникационных систем и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Ivan S. Pomazanov**, technical support engineer for corporate information systems (CIS). A limited liability company of a Micro-credit company «Denezhnaya edinica», Belgorod, Russia

**Evgeniy G. Zhilyakov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information and Telecommunication Systems and Technologies, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia